Anneaux et corps (MATH-215) — Examen final

8 juillet 2021, 8 h 15 – 11 h 15

Nom : Grothendieck Alexander

SCIPER : 42

Signature : ____________________

Numéro
1

Ce dossier d'examen contient 6 exercices, sur 28 pages, pour un total de 120 points. Veuillez utiliser l'espace quadrillé pour vos réponses. N'écrivez **PAS** dans la marge intérieure du livret.

Veuillez rédiger vos solutions sous l'exercice correspondant : sous chaque exercice, il y a l'espace quadrillé prévu à cet effet. Si vous avez besoin de davantage de papier, demandez aux surveillant(e)s ; dans ce cas, écrivez vos noms et prénoms ainsi que le numéro de l'exercice que vous résolvez (sauf s'il s'agit de feuilles de brouillon). Vous n'êtes pas autorisés à utiliser vos propres feuilles de brouillon. Veuillez ne pas écrire vos solutions avec un crayon.

Il est interdit de commencer à lire l'examen avant que le signal ne soit explicitement donné. La durée totale de l'épreuve est 180 minutes. Durant les 20 dernières minutes, veuillez rester à votre place, même si vous avez fini. Les copies seront collectées par les surveillant(e)s à la fin de l'examen, et il sera alors demandé de rester assis.

La seule feuille de papier autorisée, autre que celles de ce dossier d'examen et des brouillons, est un aide-mémoire manuscrit d'une page A4 (possiblement recto-verso). Tous les documents devront être rendus à la fin de l'examen, y compris les brouillons et l'aide-mémoire.

Les livres, notes de cours, et aide-mémoire de plus d'une page ne sont **PAS** autorisés. Aucun matériel électronique n'est autorisé. Veuillez présenter votre CAMIPRO sur le bord de votre table. Aucun sac ou manteau ne doit se trouver à votre place assise.

Prenez soin de démontrer tous vos calculs, de justifier et d'expliquer toutes les étapes de votre raisonnement. Nous ne donnons le maximum de points que si la preuve est correcte et présente tous les détails importants.

Vous êtes autorisés à utiliser tous les résultats vus en cours ou en exercices, sauf si la question demande exactement un tel résultat ou un cas particulier évident d'un tel résultat. Lorsque vous utilisez un résultat du cours ou des exercices, vous devez soit le citer par son nom, soit citer la proposition précisément en disant : on a vu dans le cours que “[ici l'énoncé précis du résultat]”.

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	20	20	20	20	20	20	120
Score:							

Exercice 1 [**20 pts**]

(1) Donnez un exemple d'un anneau A et de deux idéaux à gauche I et J de A tels que $I \cdot J \not\subseteq I \cap J$.

[*Il ne suffit pas de juste donner l'exemple, il faut aussi expliquer pourquoi* $I \cdot J \not\subseteq I \cap J$, *et pourquoi* I *et* J *sont des idéaux à gauche.*]

(2) Démontrez qu'il existe un isomorphisme d'anneaux

$$F[x, y, z] \big/ \left(x - y^2, y^3 + z^4\right) \cong F[y, z] \big/ \left(y^3 + z^4\right),$$

pour un corps F quelconque.

[*Trouver une fonction et vérifier à la main qu'il s'agit d'un isomorphisme est long. Il existe une preuve courte qui utilise les résultats du cours.*]

Exercice 2 [**20 pts**]

Soient $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier, et $1 < n \in \mathbb{N}$ un nombre entier. Ecrivons $q = p^n$. Démontrez que :

(1) Si E est un corps à q éléments, alors E est le corps de décomposition de $x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$ sur $\mathbb{F}_p$.

(2) Si L est le corps de décomposition de $x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$ sur $\mathbb{F}_p$, alors il contient exactement q éléments.

Exercice 3 [**20 pts**]

Considérons l'extension $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_{2^n}$. On a vu dans le cours que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{2^n}/\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et que $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{2^n}/\mathbb{F}_2) = \langle F \rangle$, où F est l'automorphisme de Frobenius

$$F : \mathbb{F}_{2^n} \ni \alpha \mapsto \alpha^2 \in \mathbb{F}_{2^n}.$$

(1) Soit $n = 2$, et considérons l'extension $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2(\alpha)$, où α est une racine de $x^2+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$. Donnez la matrice de l'automorphisme de Frobenius dans la base $\{1, \alpha\}$ en tant qu'application $\mathbb{F}_2$-linéaire.

(2) Soit $n = 3$, et considérons l'extension $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2(\beta)$, où β est une racine de $x^3+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$. Donnez la matrice de l'automorphisme de Frobenius dans la base $\{1, \beta, \beta^2\}$ en tant qu'application $\mathbb{F}_2$-linéaire.

Exercice 4 [**20 pts**]

Soient F un corps, et $F[\![t]\!]$ l'anneau des séries formelles sur F. Montrez que $F[\![t]\!]$ est un anneau factoriel.

[*Vous n'avez pas à démontrer l'affirmation suivante :* $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in F[\![t]\!]$ *est inversible si et seulement si* $a_0 \neq 0$.]

Exercice 5 [**20 pts**]

Considérons $I = (2x^2 + 1) \subseteq \mathbb{F}_3[x]$ et $A = \mathbb{F}_3[x] \big/ I$.

(1) L'élément $\alpha = x^3 + 2 + I \in A$ est-il inversible?

(2) Combien y a-t-il d'éléments inversibles dans l'anneau A ?

Exercice 6 [**20 pts**]

Soit $K \subseteq L$ une extension de corps galoisienne de degré fini telle que $\mathrm{Gal}(L/K) \cong A_4$. Démontrez que L est le corps de décomposition d'un polynôme $f \in K[x]$ de degré 4.