Peter Wittwer
31 mai 2024

Analyse avancée II – Série 12B

Exercice 1.

Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{(x^2+y^4)^{\frac{3}{2}}}$. Alors

- ☐ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = y$
- ☐ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 0$
- ☐ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = 1$
- ■ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y)$ n'existe pas

Exercice 2.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + xy\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors

- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas
- ■ f est différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est de classe $C^1\big(\mathbb{R}^2\big)$

Exercice 3.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$. Alors $\displaystyle\int_D \frac{\tan(y)}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy > 1$.

☐ VRAI ■ FAUX

Exercice 4.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = \big(\cos(xz),\, \sin(y-z)\big)^{\mathrm{T}}$. Alors la matrice jacobienne $J_f(x,y,z)$ de f évaluée au point $\mathbf{p} = \big(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ est :

- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ■ $J_f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 5.

Soit $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $h(u,v) = \big(-u(1-2v),\, u^2(1-v),\, uv\big)^{\mathrm{T}}$ et soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, une fonction de classe C^1. Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(u,v) = g\big(h(u,v)\big)$, satisfait en $(u,v) = (1,0)$:

- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(1,0,0) - \frac{\partial g}{\partial y}(1,0,0) + \frac{\partial g}{\partial z}(1,0,0)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = -\frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) + 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0)$
- ■ $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) - \frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0) + \frac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(-1,1,0) - 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1,1,0) + \frac{\partial g}{\partial z}(-1,1,0)$

Exercice 6.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x - y - x^2 + y^3$ et soit le point $\mathbf{p} = (-2,1)$. Alors le plan tangent au graphe de f en $\big(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})\big)$ est donné par l'équation :

- ☐ $z - 5x - 2y + 6 = 0$
- ■ $z - 5x - 2y - 2 = 0$
- ☐ $z - 5x - 2y - 8 = 0$
- ☐ $z - 2x - 5y + 7 = 0$

Exercice 7.

L'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq 0\}$ est fermé.

☐ VRAI ■ FAUX

Exercice 8.

Le polynôme de Taylor d'ordre deux de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = e^{x^2+y-1}$$

au point $(1,0)$ est :

- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + 6(x-1)^2 + 4(x-1)y + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = -1 + 2(x-1) + y + 3(x-1)^2 + 2(x-1)y + \frac{1}{2}y^2$
- ■ $p_2(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + 3(x-1)^2 + 2(x-1)y + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2x + y + 3x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$

Exercice 9.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 2x^2y^3z^4 + 2x^3y^2 - 3y^2z - 1$ et soit $\mathbf{p} = (1,1,1)$. Puisque $f(\mathbf{p}) = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) \neq 0$, l'équation $f\big(x,y,z\big) = 0$ définit dans un voisinage de $(y,z) = (1,1)$ une fonction $x = g(y,z)$ qui satisfait $g(1,1) = 1$ et $f\big(g(y,z),y,z\big) = 0$ ainsi que :

- ■ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -2$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\frac{4}{5}$

Exercice 10.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 1 \text{ et } y > -1\}$ et soit la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \ln\big(x^2 + y\big)$. Alors un vecteur $\boldsymbol{v}$ dans la direction perpendiculaire à la ligne de niveau de f qui passe par le point $(2,0)$ est :

- ☐ $\boldsymbol{v} = (-4,1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (1,-4)^{\mathrm{T}}$
- ■ $\boldsymbol{v} = (4,1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = \big(-\frac{1}{4},-1\big)^{\mathrm{T}}$

Exercice 11.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2y + 1$. Alors le point $\mathbf{p} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

- ☐ est un point de maximum local de f
- ☐ n'est pas un point stationnaire de f
- ■ est un point selle de f
- ☐ est un point de minimum local de f

Exercice 12.

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy$. La valeur maximale de f sous la contrainte $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4 = 0$ est :

- ☐ 1
- ■ $\sqrt{2}$
- ☐ 0
- ☐ $-\sqrt{2}$

Exercice 13.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ et soit la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,y) = y + 2x$. Alors le maximum absolu $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D et le minimum absolu $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D satisfont :

- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = 0$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = -\sqrt{5}$
- ■ $M = \sqrt{5}$ et $m = -1$
- ☐ $M = 1$ et $m = -1$

Exercice 14.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\,,\ y \geq 0\,,\ x \leq 0\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D x\, y\, dx\, dy$$

vaut :

- ☐ 3π
- ☐ 30
- ■ -30
- ☐ 0

Exercice 15.

La solution $u(t)$ de l'équation différentielle $u''-4u'+5u = 8\sin(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = 5$ est :

- ☐ $u(t) = -\sin(t)\big(2e^{2t}+1\big) + \cos(t)\big(e^{2t}+1\big)$
- ■ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t}+1\big) + \cos(t)\big(e^{2t}+1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(4e^{2t}-1\big) + \cos(t)\big(e^{2t}+1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t}+1\big) - \cos(t)\big(e^{2t}+1\big)$

Exercice 16.

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $(x^2+9)\,y' + x\,y - x\,y^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{4}$ satisfait aussi :

- ☐ $y(4) = 6$
- ☐ $y(4) = 1$
- ■ $y(4) = \frac{1}{6}$
- ☐ $y(4) = -\frac{1}{4}$

Exercice 17.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx$$

est égale à :

- ■ $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{-y^2}^{y^2} f(x,y)\,dx\right)dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right)dy$

Exercice 18.

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles ouverts et $f: A \to B$ une fonction bijective avec f et f^{-1} de classe C^1. Alors pour tout $\boldsymbol{p} \in A$ on a $\det(J_f(\boldsymbol{p})) \neq 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

Exercice 19.

Soient p, q et g des fonctions continues de $I \to \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, et soit $L(u) = u'' + p\,u' + q\,u$. Si u_h est solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ et u_p est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$, alors $u_p + \frac{1}{2}u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = g$.

■ VRAI □ FAUX

Exercice 20.

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 1$. Si pour tout $\varphi \in \big[0, 2\pi\big[$ fixé on a $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ r>0}} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = 1$, alors f est continue en $(0,0)$.

□ VRAI ■ FAUX

Exercice 21.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$ pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$.

□ VRAI ■ FAUX

Exercice 22.

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

□ VRAI ■ FAUX

Exercice 23.

Soient $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ deux fonctions de classe C^1. Alors la fonction $h = g \circ f$ est de classe C^1 et on a pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ que $J_h(\mathbf{p}) = J_g\big(f(\mathbf{p})\big)\,J_f(\mathbf{p})$.

■ VRAI □ FAUX

Exercice 24.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, une fonction de classe C^2. Alors pour tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{h}$$

■ VRAI　　□ FAUX

Exercice 25.

Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en $\mathbf{p}$, alors $\mathbf{p}$ est un point stationnaire de f.

■ VRAI　　□ FAUX

Exercice 26.

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Si $\mathbf{p}$ est un point stationnaire de f et si le déterminant de la matrice hessienne $H_f(\mathbf{p})$ est strictement négatif, alors f admet un maximum local en $\mathbf{p}$.

□ VRAI　　■ FAUX

Exercice 27.

Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$, une fonction qui est différentiable en un point $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Alors le vecteur $\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}), -\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}), -\dfrac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}),\ 1\right)^{\mathrm{T}}$ est perpendiculaire à l'hyperplan tangent au graphe de f en $\big(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})\big)$.

■ VRAI　　□ FAUX

Exercice 28.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble borné et fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé. Si $G\colon \widetilde{D} \to D$ est une fonction bijective de classe C^1 alors on a :

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\widetilde{D}} f\big(G(u,v)\big)\,\big|\det\big(J_G(u,v)\big)\big|\,du\,dv$$

■ VRAI ☐ FAUX

Exercice 29.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant le vecteur $v = (1,1)^{\mathsf{T}}$ est égale à la limite :

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\(h,k)\neq(0,0)}} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

☐ VRAI ■ FAUX

Exercice 30.

Soit une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble borné et fermé. Si f n'admet pas de maximum absolu sur D, alors f n'est pas continue sur D.

■ VRAI ☐ FAUX