Lénaïc Chizat

Analyse I – Corrigé de la Série 1

Ce corrigé a principalement été préparé par Peter Wittwer.

Partie I : Algèbre.

1. *a*) 81 *b*) -81 *c*) $\dfrac{1}{81}$ *d*) 25 *e*) $\dfrac{9}{4}$ *f*) $\dfrac{1}{8}$

2. *a*) $6\sqrt{2}$ *b*) $48a^5b^7$ *c*) $\dfrac{x}{9y^7}$

3. *a*) $11x-2$ *b*) $4x^2+7x-15$ *c*) $a-b$ *d*) $4x^2+12x+9$
e) $x^3+6x^2+12x+8$ *f*) a^2+1

4. *a*) $(2x-5)(2x+5)$ *b*) $(2x-3)(x+4)$ *c*) $(x-3)(x-2)(x+2)$
d) $x(x+27)$ *e*) $3x^{-1/2}(x-1)(x-2)$ *f*) $xy(x-2)(x+2)$

5. *a*) $\dfrac{x+2}{x-2}$ *b*) $\dfrac{x-1}{x-3}$ *c*) $\dfrac{1}{x-2}$ *d*) $-(x+y)$

6. *a*) $5\sqrt{2}+2\sqrt{10}$ *b*) $\sqrt{9+h}-3$

7. La réponse est a^pb^q dans tous les cas.

8. *a*) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ *b*) $2(x-3)^2-7$

9. *a*) $x=6$ *b*) $x=1$ *c*) $x_1=-3$ et $x_2=4$ *d*) $x_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $x_{1,2}=\pm1$ et $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$ *f*) $x_1=\frac{22}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$ *g*) $x=\frac{12}{5}$

10. *a*) $x\in[-4,3[$ *b*) $x\in\,]-2,4[$ *c*) $x\in\,]-2,0[\,\cup\,]1,\infty[$ *d*) $x\in\,]1,7[$
e) $x\in\,]-1,4]$

11. *a*) Faux. *b*) Vrai. *c*) Faux. *d*) Faux. *e*) Vrai. *f*) Faux.
g) Vrai. *h*) Vrai.

12. Les indications ci-après ne sont bien sûr pas les seules manières de vérifier les identités.

a) Commencer par la partie droite.

b) Pour la partie gauche, ne pas développer la somme parce qu'elle devient télescopique après la multiplication. Pour la partie droite, utiliser la troisième identité remarquable. Le résultat est $1-a^8$.

13. On trouve $A=b^{2m(2m-1)}$. Pour $b=2$, on obtient à partir de $2^{2m(2m-1)}=16^5$ que $m(2m-1)=10$. Comme m doit être entier, la seule possibilité est $m=-2$.

Partie II : Trigonométrie.

1. *a*) $\frac{5\pi}{3}$ *b*) $-\frac{\pi}{10}$

2. *a*) $150°$ *b*) $\frac{360°}{\pi} \approx 114.6°$

3. 2π cm

4. *a*) $-\frac{1}{2}$ *b*) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *c*) $\sqrt{3}$

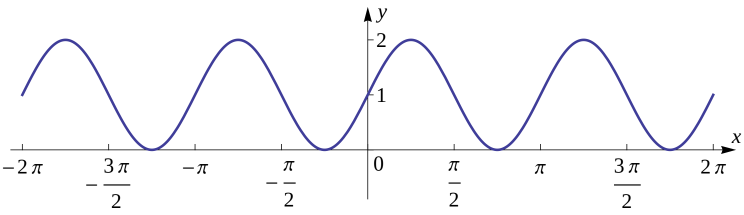
5. $a = 24\sin(\theta)$, $b = 24\cos(\theta)$

6. $\frac{1}{15}(4 + 6\sqrt{2})$

7. Développer les parties gauches en utilisant la définition de la fonction tan.

8. $x \in \{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$

9.



Partie III : Fonctions réelles.

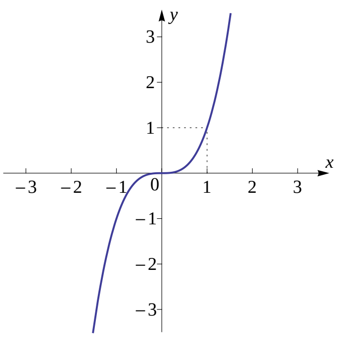
1. *a*) -2 *b*) 2.8 *c*) $-3, 1$ *d*) $-2.5, 0.3$ *e*) Domaine $[-3, 3]$, image $[-2, 3]$

2. $12 + 6h + h^2$

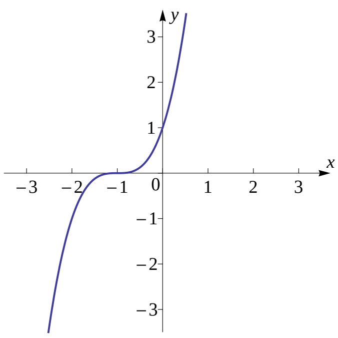
3. *a*) $]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, \infty[$ *b*) $]0, \infty[$ [1] *c*) $]-\infty, -1] \cup [1, 4]$

4. *a*) Réflexion par rapport à l'axe Ox.
b) Étirement vertical d'un facteur 2, suivi d'une translation d'une unité vers le bas.
c) Translation de trois unités vers la droite, puis de deux unités vers le haut.

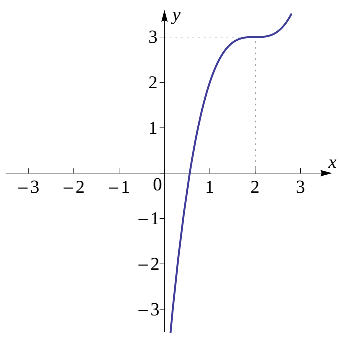
5. *a*)



b)

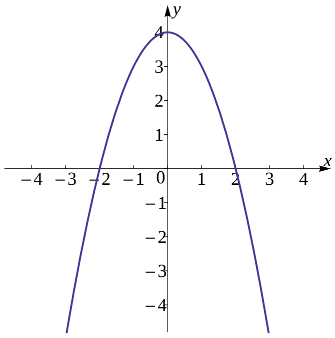


c)

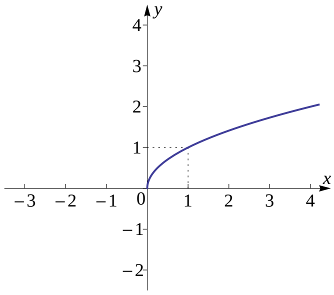


1. Dans ce cours, les puissances avec exposants non-entiers sont définies seulement pour les nombres strictement positifs.

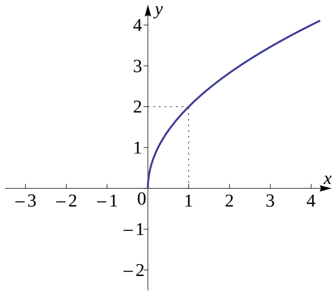
d)



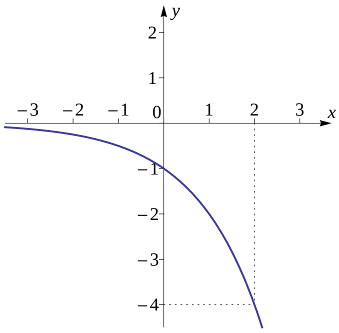
e)



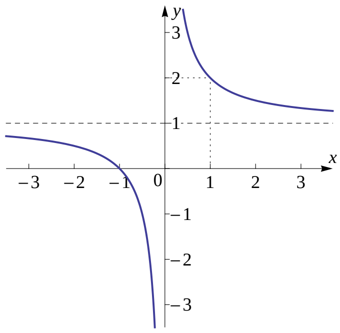
f)



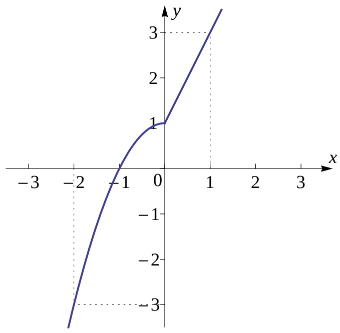
g)



h)



6. *b*)



6. *a*) $f(-2) = -3, \;\; f(1) = 3$ *b*) Ci-dessus (à la fin de l'Ex. 5).

7. *a*) $4x^2 - 8x + 2$ *b*) $2x^2 + 4x - 5$ *c*) $8x - 21$

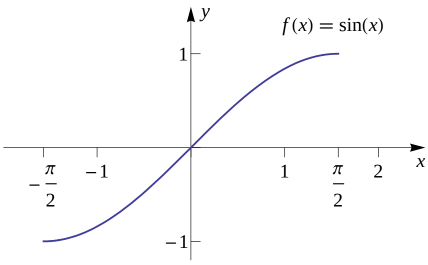
8. La réponse est $a^p b^q$ dans tous les cas.

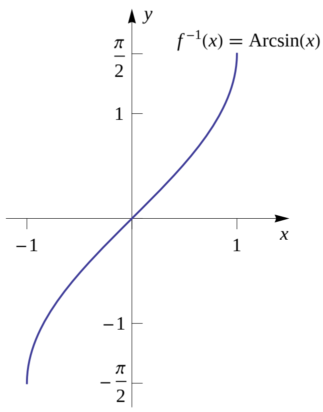
9. *Remarques générales (ou plutôt rappel) :*

— Le domaine $D(f^{-1})$ de la fonction réciproque f^{-1} est l'image de f. En effet, I a été choisi pour que f soit injective (cf. énoncé), et donc f est bijective entre I et son image.

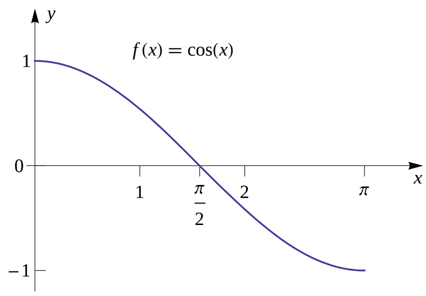
— Une fois qu'on a tracé le graphe de f, on peut trouver le graphe de f^{-1} géométriquement en faisant une réflexion par rapport à la droite $y = x$.

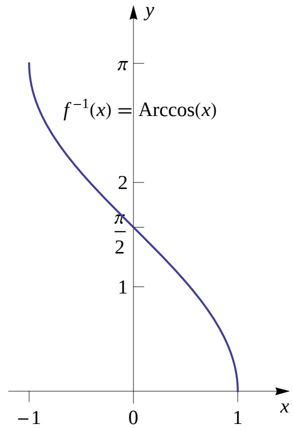
a) $D(f^{-1}) = [-1, 1]$



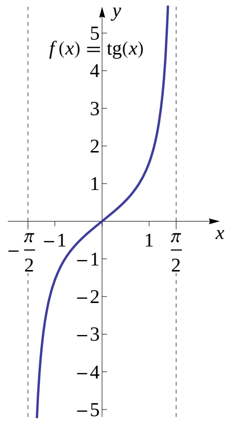


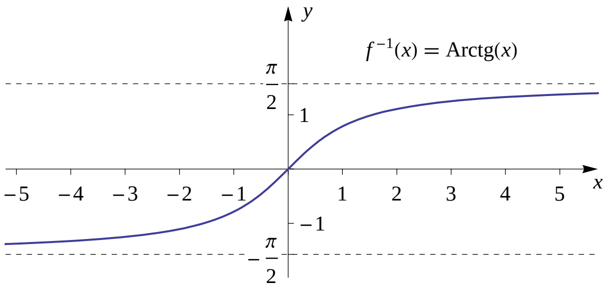
$b)\ \ D(f^{-1}) = [-1, 1]$



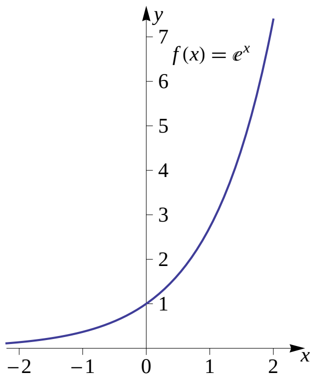


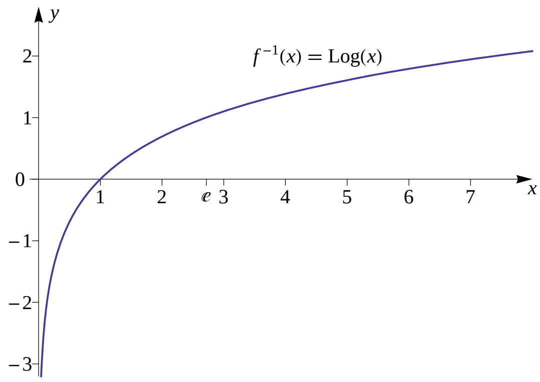
$c)\ \ D(f^{-1}) = \mathbb{R}$



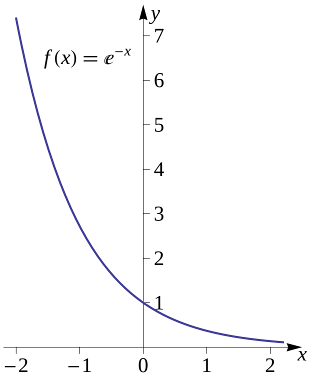


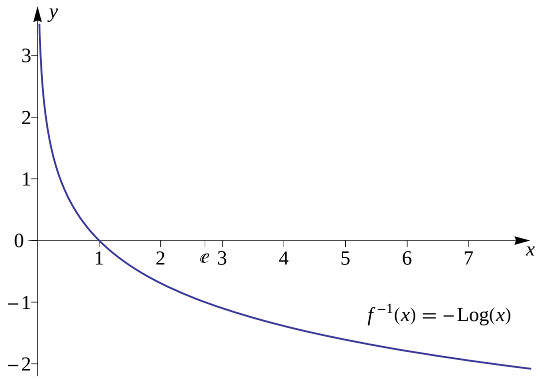
$d)\ \ D(f^{-1}) =]0, \infty[$





$e)\ \ D(f^{-1}) =]0, \infty[$





$f)\ D(f^{-1}) =]0, \infty[$