Exemple : $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$

$$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\} \quad (4 \text{ éléments})$$

$$X \times Y \neq Y \times X \quad (\text{sauf si } X = Y)$$

Plus généralement :

$$X \times Y \times Z = \{\underbrace{(x, y, z)}_{\text{triplet}} \; ; \; x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

triplet (plus généralement, on appelle $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet)

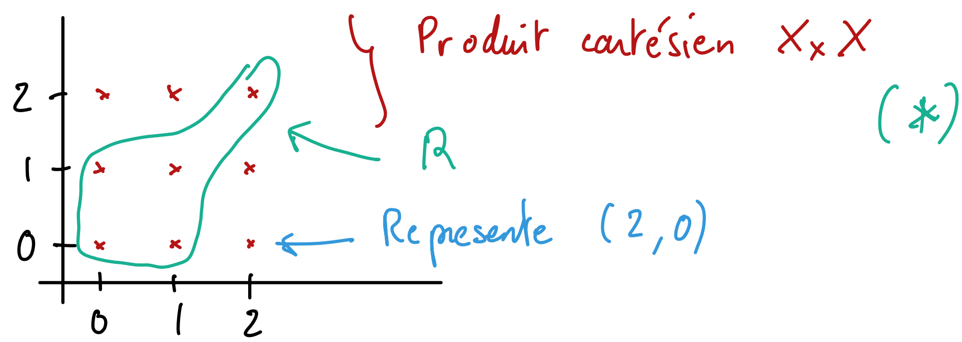
Autre exemple : $X \times X = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

fin cours 21/09

Définition (Relation) : Soit X un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé une relation.

Exemple : $X = \{0, 1, 2\}$

Prenons $R := \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)\}$



Plus généralement, une relation sur $X \times Y$ est la donnée de $R \subset X \times Y$.

0.1.3 Classes d'équivalence

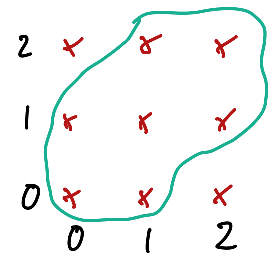
Notations : $\forall$ signifie "pour tout"
$\exists$ signifie "il existe"

Soit X un ensemble, R une relation sur X. On dit que R est :

Exemple :

- **Réflexive** si $\forall x \in X$, $(x,x) \in R$ — (**) est réflexive
- **Symétrique** si $\forall x, y \in X$, tels que $(x,y) \in R$ alors $(y,x) \in R$ — (**) est symétrique
- **Transitive** si $\forall x, y, z \in X$ tels que $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$ alors $(x,z) \in R$ — (*) est transitive

Un exemple de relation qui n'est pas transitive :



R n'est pas transitive

(en effet $(0,1) \in R$, $(1,2) \in R$ mais $(0,2) \notin R$)

Def : Une relation réflexive, symétrique et transitive est appelée une <u>relation d'équivalence</u>.

Ex : (*) définit une relation d'équivalence.

Notation : si R est une relation d'équivalence et $(x,y) \in R$ on écrit $x \sim y$ et on lit "x est équivalent à y".

Exemples : Soit X l'ensemble des élèves d'Analyse 1 : — Relation d'équivalence ?

- $(x,y) \in R$ si "x et y sont nés le même mois" — Oui
- ——— "x et y sont nés à 30 jours d'intervalle au moins". — Non (pas transitif)
- ——— "x est + grand que y". — Non (pas symétrique).
- (**) ——— "x et y sont dans la même section" — Oui

Def : Soit X un ensemble, $\sim$ une relation d'équivalence.

(i) Pour tout $x \in X$, <u>la classe d'équivalence</u> de x, notée C_x est l'ensemble, $C_x := \{ y \in X : y \sim x \}$ signifie $(y,x) \in R$.

(ii) Le quotient de X par $\sim$, est l'ensemble des classes d'équivalences
Noté $X/\sim$

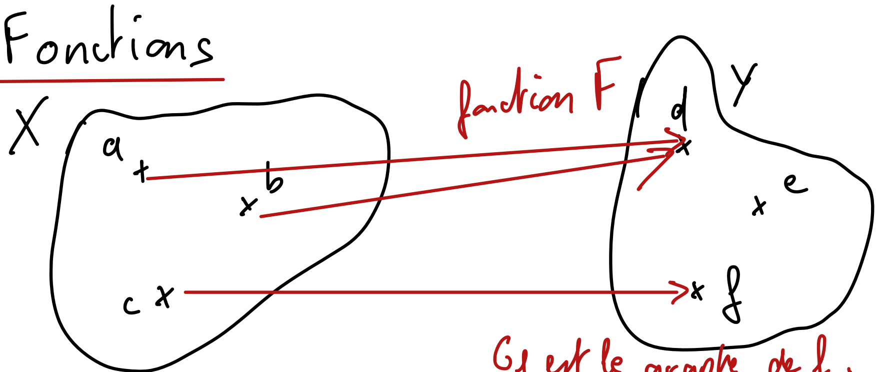
Exemples : (*) · la classe d'équivalence de 2 est : $\{2\}$
· la ——————— de 1 est : $\{0,1\}$
· la ——————— de 0 est : $\{0,1\}$

(De manière générale, si $x \sim y$ alors $C_x = C_y$)
l'ensemble quotient est $\{\{0,1\},\{2\}\} = X/\sim$

(**) l'ensemble quotient est

$X/\sim = \{\{$élèves en MX$\}, \{$élèves en EL$\}, \{$élèves en CGC$\}\}$

0.1.4 Fonctions



(*)

G_f est le graphe de f.

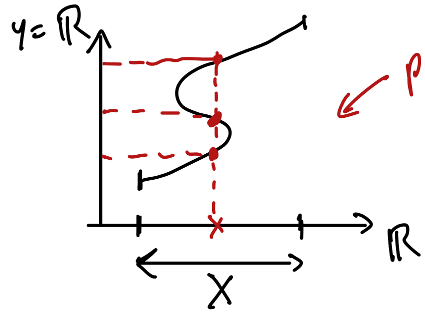
Def : Soient X et Y deux ensembles. Une fonction f de X vers Y est la donnée de $G_f \subset X \times Y$ tel que $\forall x \in X$ il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x,y) \in G_f$.

On appelle y l'image de x par f, on note $y = f(x)$.

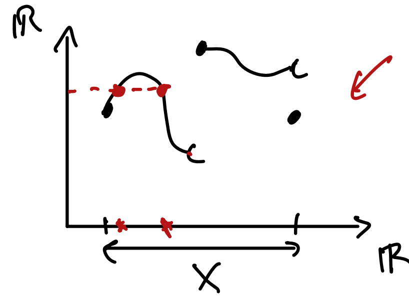
· On note : $f : \left| \begin{array}{l} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ (remarquez la différence entre $\to$ et $\mapsto$).

· On appelle X le domaine et Y le co-domaine de f.
· G_f est le graphe de f

Exemple :



pas une fonction



c'est une fonction

Def : Soit $f : X \to Y$.

(i) Pour $A \subset X$, l'image de A par f, notée $f(A)$, est l'ensemble

$$f(A) := \{ f(z) \; ; \; z \in A \}$$

Exemple (*) :

$\cdot \; F(\{a,b\}) = \{d\}$

(ii) L'ensemble image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) := \{ f(z) \; ; \; z \in X \} = f(X)$$

$\cdot \; \mathrm{Im}(F) = \{d, f\}$

(iii) Pour $B \subset Y$, la pré-image de B par f, notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble :

$$f^{-1}(B) := \{ x \in X \; ; \; f(x) \in B \}$$

$F^{-1}(\{e\}) = \emptyset$

$F^{-1}(\{d\}) = \{a, b\}$

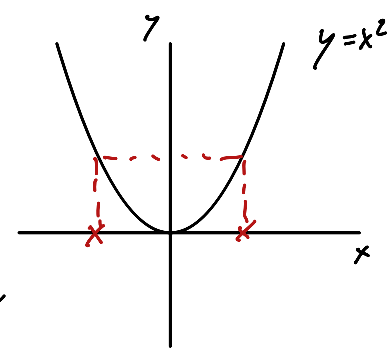
Soit $f : X \to Y$. On dit que :

- f est <u>injective</u> si $\forall x, y \in X$, tels que $x \neq y$ on a $f(x) \neq f(y)$
- f est <u>surjective</u> si $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $f(x) = y$.
  (autrement si $\mathrm{Im}(f) = Y$)
- f est <u>bijective</u> si elle est <u>injective</u> et <u>surjective</u>

Exemple : • (*) pas injective, pas surjective

• Considérons $f(x) = x^2$.

$\{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\}$



$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$: bijective (injective et surjective)

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$: injective mais pas surjective

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$: surjective mais pas injective

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: ni injective ni surjective.

Remarques : • $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ est toujours surjective.

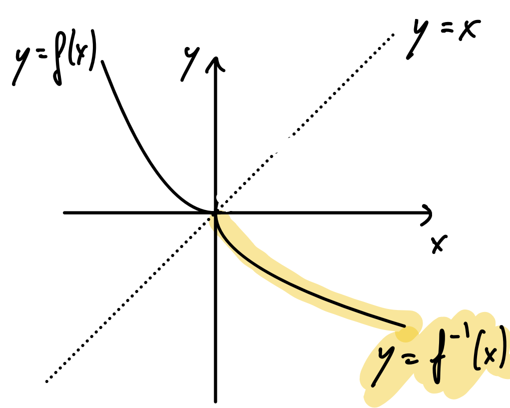
• si $f : X \to Y$ est injective alors $f : X \to \mathrm{Im}(f)$ est bijective.

Def / proposition : Si $f : X \to Y$ est bijective alors elle admet une (unique) fonction réciproque $f^{-1} : Y \to X$ telle que :

$$\forall x \in X \text{ et } y \in Y, \quad f^{-1}(y) = x \quad \text{ssi} \quad y = f(x)$$

De manière équivalente : $\forall x \in X,\ f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in Y,\ f(f^{-1}(y)) = y$.

Exemple : $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ ← $\{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$



On a f est bijective et

$$f^{-1} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_- \\ x \mapsto -\sqrt{x} \end{array} \right.$$

Def : (composition de fonctions) : Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions. La composition de g par f (aussi appellée "f suivie de g"), notée $g \circ f$ est la fonction :

$$g \circ f : \left| \begin{array}{l} X \to Z \\ x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{array} \right.$$

Compositions multiples :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & Z \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

Manifestement, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$

⇝ on peut sans ambiguïté enlever les parenthèses, on dit que la composition est associative.

← fin cours 25/09