Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 2 - Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit K un corps et $f(x) \in K[x]$ un polynôme de degré 3. Montrer que $f(x)$ est irréductible si et seulement si $f(x)$ n'a pas de racines dans K.

Solution. ($\Rightarrow$) *Si le polynôme $f(x)$ possède une racine α dans K, alors $f(x)$ est divisible par $x - \alpha$ et donc réductible.*

($\Leftarrow$) *Si $f(x)$ est réductible, il admet alors un facteur de degré 1 sur K, c'est-à-dire que $(\beta x + \gamma)|f(x)$. Mais vu qu'on travaille sur un corps K, cela implique que l'élément $-\gamma/\beta$ est une racine de $f(x)$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, $f(x)$ n'a pas de racines dans K.*

Exercice 2. Soit $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $a_n, a_0 \neq 0$. Montrer que si une fraction irréductible $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est racine du polynôme $f(x)$, alors p divise a_0 et q divise a_n.
Utiliser ce résultat pour trouver la factorisation des polynômes $g(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ et $h(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ dans $\mathbb{R}[x]$.

Solution. *On suppose que la fraction irréductible $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est racine du polynôme $f(x)$. Ceci nous donne l'équation suivante (après avoir multiplié par q^n):*

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

et par la suite

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

Comme p et q sont premiers entre eux, on obtient finalement que p divise a_0. La divisibilité de a_n par q est obtenue de manière similaire.

On a $g(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 4)$ et $h(x) = (x + 3)(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2})(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2})$.

Exercice 3. Soient des matrices $A, B, Q, D \in K^{n \times n}$ sur un corps K. Montrer que :

i) $\det(I + AB) = \det(I + BA)$ si A et B sont inversibles,

ii) $\det(Q) = \pm 1$ si Q est orthonormale ($Q^TQ = I$),

iii) $\det(A + zI)$ est un polynôme de $K[z]$ de degré n,[1]

iv) $\det(D_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ si D est antidiagonale définie par

$$(D_n)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i + j = n + 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} .$$

Solution. *i) Par la multiplicativité du déterminant,* $\det(I+BA) = \det(A)^{-1}\det(I+AB)\det(A) = \det(I + AB)$.

ii) Remarquons que $1 = \det(I) = \det(Q^TQ) = \det(Q)^2$. *En outre, les seules racines du polynôme* $x^2 - 1$ *sur* K *sont* ± 1.

iii) La formule de Leibniz donne :

$$\det(A + zI) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (A + zI)_{i,\sigma(i)}$$

Chaque terme de la somme est un polynôme en z *de degré égal au nombre de points fixes de la permutation* σ *en question, d'où le résultat.*

iv) Le développement de Laplace du déterminant de D *par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne donne*

$$\begin{aligned} \det(D_n) &= (-1)^{n+1}\det(D_{n-1}), \\ &= (-1)^{(n+1)+n}\det(D_{n-2}), \\ &= \dots, \\ &= (-1)^{(n+1)+n+\ldots+3}\det(D_1), \\ &= (-1)^{(n+1)+n+\ldots+3+2}, \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+n} = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit K un corps.

i) Montrer qu'un polynôme $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$ si et seulement si $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K.

ii) Soient $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. On considère les assertions suivantes: a) $f(x) = ag(x)$, $a \in K \setminus \{0\}$. b) $f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes racines (avec multiplicité).

Montrer que a) implique b). Est-ce que b) implique a)? Justifiez votre réponse.

[1] Utiliser la formule du déterminant de Leibniz pour expliciter les coefficients du polynôme.

Solution. *i) Si le polynôme $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$, alors il divise aussi les polynômes de degré zéro, ce qui implique que lui-même doit avoir degré zéro, c'est-à-dire $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K.*

Pour l'autre direction on doit montrer que si $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de K, alors $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$. Ceci est évident car K est un corps.

ii) On montre d'abord que a) implique b). On sait que $f(x) = ag(x)$, avec $a \in K$. Si α est une racine de $g(x)$ avec multiplicité m alors $(x-\alpha)^m | g(x)$. Mais ça implique que $(x-\alpha)^m | ag(x) = f(x)$, et donc que α est aussi une racine de $f(x)$ avec multiplicité aux moins m. Si on a une racine de $f(x)$ avec multiplicité m, et on veut montrer que elle est aussi racine pour $g(x)$ avec une multiplicité aux moins m, la démonstration est similaire.

b) n'implique pas a). Cela peut être vu, par exemple en construisant deux polynômes $p_1(x) \neq p_2(x)$ sur K de degré au moins 2 qui n'ont pas de racines. Les polynômes $x \cdot p_1(x) \neq x \cdot p_2(x)$ ont seulement une racine, notamment 0 avec multiplicité 1.

Par exemple un peut choisir $K = \mathbb{Q}$, $p_1(x) = x^2 - 2$ et $p_3(x) = x^2 - 3$ sur $\mathbb{Q}$. (Ce sont des polynômes irréductibles parce qu'ils n'ont pas de racines et sont de degré 2.) Mais $x \cdot p_1(x) \neq a \cdot x \cdot p_2(x)$ pour chaque $a \in K$.

Exercice 5. Cet exercice concerne le théorème 1.12 des notes du cours. Soient f et g deux polynômes sur K non tous deux nuls et soit

$$I = \{u \cdot f + v \cdot g \colon u, v \in K[x]\}.$$

Montrer que I est un sous-groupe de $(K[x], +)$ et que pour tout $h \in I$ et tout $w \in K[x]$, $h \cdot w \in I$. On appelle I l'*idéal* de $K[x]$ généré par f et g.

Solution. *Pour montrer que I est un sous-groupe, on vérifie d'abord que l'élément neutre 0 appartienne bien à I. On montre ensuite la stabilité de la loi de composition $+$ dans I, c'est-à-dire : $f + g \in I$ et $-f \in I$ pour tout $f, g \in I$.*

Pour la stabilité par multiplication externe, soit $h \in I$ et $w \in K[x]$. Alors

$$h = u \cdot f + v \cdot g,$$

et donc

$$w \cdot h = (w \cdot u)f + (w \cdot v)g \in I.$$

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant:

Soit R un anneau commutatif, intègre et fini alors R est un corps.

Soit donc $r \in R \setminus \{0_R\}$, on veut montrer que r admet un inverse dans R. Pour cela on considère la suite d'éléments de R, donnée pour tout entier $i \geq 0$ par

$$a_i := r^i = r \cdot \ldots \cdot r \ (i \text{ fois})$$

avec $a_0 = 1_R$.

i) Montrer qu'il existe deux entiers $0 \leq m < n$ tels que $r^n = r^m$.

ii) En deduire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $r^k - 1_R = 0_R$.

iii) Conclure la preuve.

Solution. *i) On considère la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Comme l'anneau R est fini et $a_i \in R$ pour tout i, cette suite ne peut avoir qu'un nombre fini d'éléments distincts. Ceci implique qu'on peut trouver deux entiers $0 \leq m < n$ tels que $r^n = r^m$.*

ii) En utilisant le point précédent, on a

$$r^n = r^m \Longleftrightarrow r^n - r^m = 0 \Longleftrightarrow r^m(r^{n-m} - 1_R) = 0$$

Comme R est intègre, soit $r^m = 0_R$, soit $r^{n-m} - 1_R = 0_R$. Or, comme $r \neq 0_R$ on a aussi $r^m \neq 0_R$, de nouveau car R est intègre. Ainsi $r^{n-m} - 1_R = 0_R$ et on peut donc poser $k = n - m \geq 1$ afin d'obtenir $r^k - 1_R = 0_R$.

iii) Comme $r^k - 1_R = 0_R$ et $k \geq 1$ on a

$$r^k = 1_R \Longleftrightarrow r \cdot r^{k-1} = r^{k-1} \cdot r = 1_R$$

L'inverse de l'élément arbitraire r existe et est donné par r^{k-1}. Ainsi tous les éléments de $R \setminus \{0_R\}$ sont inversibles et comme R est déjà un anneau, c'est un corps.

Exercice 7. (*) Soit K un corps, et $A \in K^{n\times n}$ une matrice inversible. Posons $\widetilde{A} := (\mathrm{com}A)^T$, la transposée de la comatrice de A.[2]

i) Montrer que $\det(A) \neq 0$.

ii) Montrer que $A^{-1} = \det(A)^{-1}\widetilde{A}$.

iii) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, il existe $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ telle que $AB = I$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

Solution.

[2]Rappel :

$$(\mathrm{com}A)_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j}),$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.