Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 4

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit V un espace vectoriel et soit $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Soit $f : V \times V \to K$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$f(v_1, v_1) = 2, f(v_2, v_2) = 3, f(v_3, v_3) = -1, f(v_1, v_2) = 0, f(v_2, v_3) = 1, f(v_3, v_1) = -2.$$

1. Écrire la matrice A_B^f de la forme bilinéaire f pour la base B.
2. Trouver une base orthogonale $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ pour V par rapport à la forme bilinéaire f.

Exercice 2. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer que deux formes bilinéaires $f, g : V \times V \to K$ sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Exercice 3. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer qu'une forme bilinéaire $f : V \times V \to K$ est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Exercice 4. Soit $V = \mathbb{R}_3[x]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 sur $\mathbb{R}$, muni de la forme

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

1. La forme est-elle bilinéaire ? Symétrique ? Non-dégénérée ?
2. Décrire la matrice $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ pour $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.
3. Montrer que l'ensemble $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ de polynômes

$$p_0 = 1 \qquad p_1 = x$$
$$p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad p_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

est une base orthogonale de V.

Exercice 5. On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Est-ce que $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ possède une base orthogonale par rapport à la forme bilinéaire symétrique standard ?

Exercice 6. Soit une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ vérifiants

- $\langle u, u \rangle > 0$, et
- $\langle v, v \rangle < 0$.

Montrer qu'il existe un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\langle w, w \rangle = 0$.

En déduire que le procédé de Gram-Schmidt est parfois impossible si la forme bilinéaire n'est ni définie positive, ni définie négative.

Exercice 7. Montrer que la relation de congruence $\cong$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $K^{n \times n}$.

Rappel : deux matrices $A, B \in K^{n \times n}$ sont *congruentes* s'il existe une matrice $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $A = P^T B P$.

Exercice 8. (*) Soit K un corps de caractéristique différente de 2, et V un K-espace vectoriel de dimension finie n. Considérons une forme bilinéaire f sur V qui est **anti-symétrique**, c'est-à-dire

$$f(x, y) = -f(y, x) \quad \forall x, y \in V.$$

Montrer que si f est non-dégénérée, alors n est pair.
L'implication inverse est-elle vraie ?