Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 5 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Transformez les matrices réelles suivantes en matrices diagonales dont les éléments sont $0, 1$ et -1. Combien de 0, 1 et -1 sont sur la diagonale ? (Ces quantités sont appelées l'indice de nullité, l'indice de positivité et l'indice de négativité.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. *On va utiliser l'algorithme 3.1 pour diagonaliser A. On additionne -2 fois la première ligne sur la deuxième ligne pour obtenir $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ et -2 fois la première colonne sur la deuxième colonne pour obtenir la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Finalement, on multiplie la deuxième colonne par $1/5$ et on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. L'indice de nullité est donc $r_0 = 0$, l'indice de positivité est $r_+ = 1$, et l'indice de négativité est $r_- = 1$.*

2. *On additionne -1 fois la première ligne sur la deuxième ligne: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On additionne -1 fois la première colonne sur la deuxième colonne : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc l'indice de nullité est $r_0 = 1$, l'indice de positivité est $r_+ = 1$ et l'indice de négativité est $r_- = 0$.*

3. *On additionne -2 fois la première ligne sur la deuxième ligne et après -2 fois la première colonne sur la deuxième colonne pour obtenir :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On additionne -1 fois la première ligne sur la troisième ligne et après -1 fois la première colonne sur la troisième colonne pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

On additionne $-3/5$ fois la deuxième ligne sur la troisième ligne et et après $-3/5$ fois la deuxième colonne sur la troisième pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

On multiplie la première colonne par $1/2$, la deuxième colonne par $1/5$ et la troisième colonne par $5/4$ pour avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'indice de nullité est $r_0 = 0$, l'indice de positivité est $r_+ = 2$, et l'indice de négativité est $r_- = 1$.

Exercice 2. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre u et $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$? La distance entre u et V est $\operatorname{dist}(u, V) = \min_{v \in V} ||u - v||$, où la norme $|| \cdot ||$ est par rapport au produit scalaire ordinaire.

Solution. *Soit $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. La distance entre un vecteur u et un sous-espace V est par définition $\min_{v \in V} ||u - v||$. En posant*

$$A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^3\}$, donc $\min_{v \in V} ||u - v|| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} ||u - Ax||$. On sait du cours que la solution $x^\star$ du système $A^T Ax = A^T u$ est un vecteur tel que

$||u - Ax||$ est minimisée. Donc il suffit de résoudre ce sytème et alors $||Ax^\star - u||$ est la réponse voulue.

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^Tu = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \qquad (A^TA)^{-1}A^Tu = x^\star = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$||Ax^\star - u|| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

est la réponse voulue.

Preuve alternative: On applique le procédé de Gram-Schmidt sur v_1, v_2, v_3, u pour obtenir une base orthogonale v_1', v_2', v_3', u'. Alors, $u = u' + x$, où $x \in \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3)$ et $||u'|| = \operatorname{dist}(u, V)$ comme expliqué au début du chapitre 4.1. du polycopié.

Exercice 3.

1. Soit V un espace vectoriel sur K avec une base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique, et $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $P^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P$ est une matrice diagonale.

   Montrer que les éléments $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, où P_k est la k-ième colonne de P, forment une base orthogonale de V.

2. Soit maintenant V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_3$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base V et $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{Z}_3$ une forme bilinéaire symétrique t.q.

   $$A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer une base orthogonale de V.

Solution. *1. Soient $D = P^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P$ une matrice diagonale, et $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, c'est-à-dire $u_k = \sum_{i=1}^n P_{i,k} v_i$. Alors,*

$$\begin{aligned} \langle u_i, u_j \rangle &= [u_i]_B^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} [u_j]_B \\ &= (P_i)^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P_j \\ &= (Pe_i)^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} Pe_j \\ &= e_i^T (P^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P) e_j \\ &= e_i^T D e_j \\ &= D_{i,j}, \end{aligned}$$

où $D_{i,j}$ est égale à zéro si $i \neq j$. Les vecteurs u_k sont donc orthogonaux et linéairement indépendants, parce que P est inversible.

2. *On applique l'algorithme 3.1 du cours. Pour trouver la matrice P, on reporte toutes les opérations faites sur la matrice A à une matrice identité I.*

   (a) *On commence avec $A_0 = A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, $P_0 = I$.*

   (b) *On échange les lignes 1 et 3, puis les colonnes 1 et 3 de A_0. On fait de même sur P_0. On obtient*

   $$A_1 = P_1^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) *On additionne -2 $(= 1)$ fois la ligne 1 à la ligne 2 de A_1 et similairement pour les colonnes. On fait de même sur P_1. On obtient*

   $$A_2 = P_2^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) *On additionne -1 $(= 2)$ fois la ligne 1 à la ligne 3 de A_2 et similairement pour les colonnes. On fait de même sur P_2. On obtient*

   $$A_3 = P_3^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   On a ainsi trouvé une matrice

   $$P = P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   telle que

   $$P^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Une base orthogonale de V est donc donnée par les vecteurs

   $$u_1 = v_3,\ u_2 = v_2 + v_3,\ u_3 = v_1 + 2v_3$$

   où on a utilisé le premier point de cet exercice.

Exercice 4. Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y\rangle = x^\intercal \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Montrer que $\mathbb{Z}_2^2$ ne possède pas de base orthogonale.

Solution. *On note*
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v_1 = (a,b)^T$ et $v_2 = (c,d)^T$ deux vecteurs non nuls orthogonaux, i.e. tels que
$$v_1^T C v_2 = (a,b)C\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad + bc = 0.$$
Si un des coefficients est nul, par exemple (et sans perte de généralité) si $a = 0$:
$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad d \neq 0,$$
où la 1-ère et 3-ère implications decoulent de l'hypothèse que les vecteurs sont non nuls. Par conséquent, les vecteurs sont linéairement dépendants. D'autre part, si tous les coefficients sont non nuls, on sait que $ad = bc$ parce que le corps est de caractéristique 2. Or,
$$ad = bc \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} ab^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} cd^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = bd^{-1}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$
ce qui montre que les vecteurs sont de nouveau linéairement dépendants. On conclut que si v_1, v_2 sont orthogonaux, alors les vecteurs ne sont pas libres. En particulier, il n'existe pas de base orthogonale de $\mathbb{Z}_2^2$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Preuve alternative : l'égalité $ad + bc = 0$ est équivalente à $ad - bc = 0$ en caractéristique 2. On reconnaît là le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$. Celui-ci étant nul, la matrice n'est pas inversible et les vecteurs v_1 et v_2 ne peuvent former une base de $\mathbb{Z}_2^2$.

Exercice 5. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $||v_1 + \ldots + v_n||^2 = ||v_1||^2 + \ldots + ||v_n||^2$.

b) Montrer que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i, $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Solution. *a) On va montrer que $||v_1 + \ldots + v_n||^2 = ||v_1||^2 + \ldots + ||v_n||^2$. Par définition,*
$$\begin{aligned} ||v_1 + \ldots + v_n||^2 &= \langle v_1 + \ldots + v_n, v_1 + \ldots + v_n \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i = j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2 \end{aligned}$$

où dans la 3ème ligne, on a utilisé le fait que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

b) *Supposons que l'ensemble* $\{v_1 \ldots, v_n\}$ *ne soit pas libre. Alors il existe des coefficients* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, *non tous nuls, tels que* $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0$. *Soit* $c_i \neq 0$ *pour un certain* $i \in \{1, \cdots, n\}$. *Alors*

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, v_i \rangle \\ &= \langle c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \langle v_j, v_i \rangle \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

parce que $c_i \neq 0$ *et* $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, *donc on arrive à une contradiction. Alors* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *est un ensemble libre.*

Exercice 6. Soit V un espace euclidien de dimension finie avec une base orthonormale $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Montrer que pour tout $v \in V$ on a

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

2. Pour $f, g \in V$, montrer l'**identité de Parseval** :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f, v_i \rangle \langle v_i, g \rangle.$$

Solution. *1. Soit* $v \in V$ *avec* $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$ *pour quelques* $\alpha_k \in \mathbb{R}$. *Alors,*

$$\begin{aligned} \langle v, v_k \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle v_k.$$

2. *On utilise* 1.*:*

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle f, v_k\rangle v_k, \sum_{k=1}^{n} \langle g, v_k\rangle v_k \right\rangle && (1)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\langle \langle f, v_k\rangle v_k, \sum_{i=1}^{n} \langle g, v_i\rangle v_i \right\rangle && (2)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \langle f, v_k\rangle v_k, \langle g, v_i\rangle v_i\rangle && (3)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \langle f, v_k\rangle v_k, \langle g, v_k\rangle v_k\rangle && (4)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle f, v_k\rangle\langle g, v_k\rangle. && (5)
\end{aligned}$$

Dans (2) et (3), nous avons utilisé le fait qu'une forme bilinéaire est linéaire par rapport à un élément. Dans (4) et (5), nous avons utilisé l'orthonormalité.

Exercice 7. Soit $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux par rapport au produit scalaire standard.

Posons $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la matrice dont les colonnes sont les $\{a_i\}_{i=1}^m$, et $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}\,(A)$ la projection orthogonale sur l'espace $\mathrm{span}(\{a_i\}_{i=1}^m)$. Par définition, $\Pi(v) = \arg\min_{u\in \mathrm{Im}\,(A)} ||u - v||$.

1. Montrer que $m \leq n$ à l'aide de l'exercice 5.
2. Montrer que $\Pi(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, a_i\rangle a_i$ à l'aide de l'exercice 6. En déduire que Π est une application linéaire : $\Pi(v) = Mv$ dans la base canonique pour une certaine matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de rang m.
3. Montrer que $M = AA^T$.

Solution. *1. Les m vecteurs sont linéairement indépendants dans un espace de dimension n. On a donc forcément $m \leq n$.*

2. *On complète les colonnes de A en une base orthonormale grâce à Gram-Schmidt. On obtient une base orthonormale $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_{n-m}\}$. Par l'exercice 7, on a*

$$v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, a_i\rangle a_i + \sum_{i=1}^{n-m} \langle v, b_i\rangle b_i \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

et on a toujours

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i \quad \forall u \in \mathrm{Im}\,(A).$$

pour des coefficients α_i.

Le théorème de Pythagore donne alors $||u-v||^2 = \sum_{i=1}^m (\langle v, a_i\rangle - \alpha_i)^2 + \sum_{i=1}^{n-m} \langle v, b_i\rangle^2$. L'unique choix de coefficients α_i et donc de vecteur u qui minimisent cette norme est bien $\alpha_i = \langle a_i, v\rangle$, ce qui conclut.

3. *En manipulant l'expression obtenue précédemment, on obtient*

$$\begin{aligned}\Pi(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, a_i \rangle a_i &= \sum_{i=1}^{m} a_i \langle a_i, v \rangle, \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i a_i^T v, \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} a_i a_i^T \right) v.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à bien vérifier que $\sum_{i=1}^{m} a_i a_i^T = AA^T$.

Exercice 8. On considère cette fois-ci une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dont les colonnes sont supposées linéairement indépendantes. On considère à nouveau le cas du produit scalaire standard.

1. Montrer que $\ker(A^T A) = \{0\}$ et donc que $A^T A$ est inversible.

Soit $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Im}\,(A)$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(A)$, et soit $A = A^* R$ la décomposition QR de A (corollaire 3.19 des notes du cours).

2. Montrer que R est inversible et donc que Π coïncide avec la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(A^*)$. Déduire de l'exercice précédent que $\Pi = A^*(A^*)^T$.
3. Montrer que $A^T A = R^T R$.
4. Conclure que $\Pi = A(A^T A)^{-1} A^T$.

Solution.

1. *Pour un* $x \in \ker(A^T A)$, *on a* $A^T A x = 0$, *et donc aussi* $x^T A^T A x = 0$. *Par suite,* $||Ax||^2 = 0$ *et alors* $Ax = 0$. *Or les colonnes de* A *on été supposées linéairement indépendantes, et donc* $x = 0$ *est l'unique solution.*
2. *La matrice* R *est triangulaire supérieure, et les éléments de sa diagonale sont des normes de vecteurs non nuls. Son déterminant est donc non nul et* R *est inversible. Il suit en particulier que* $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(A^*)$. *L'exercice précédent donne directement* $\Pi = A^*(A^*)^T$.
3. *On a directement* $AA^T = R^T (A^*)^T A * R$. *De plus, les colonnes de* A^* *étant orthonormales, on en déduit immédiatement* $(A^*)^T A* = I$, *d'où le résultat.*
4. *En partant de la relation* $\Pi = A^*(A^*)^T$, *et comme* R *est inversible, on trouve*

$$\Pi = A^*(A^*)^T = AR^{-1}R^{-T}A^T = A(R^T R)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T,$$

comme souhaité.

Exercice 9. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$. Trouver une factorisation $A = A^*R$ du corollaire 3.19 des matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}.$$

Solution. *Nous trouvons une factorisation de A_2, ce qui nous donne une factorisation de A_1 lorsque $n = 3$.*

On utilise le procédé de Gram-Schmidt et on démontre la forme générale de la factorisation par récurrence.

Soient $v_1, \ldots, v_n$ les colonnes de $A = A_2$ et $u_1, \ldots, u_n$ les vecteurs obtenus par Gram-Schmidt. Si $i \geq j+2$, on a $v_i \perp v_1, ..., v_j$ et donc $v_i \perp u_1, ..., u_j$ aussi, car $\operatorname{span}(v_1, ..., v_k) = \operatorname{span}(u_1, ..., u_k)$ pour tout k. L'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut donc être simplifée:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_{j+1} &= v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j, \;\; 1 \leq j \leq n-1 \end{aligned}$$

Nous montrons par récurrence que

$$(u_j)_i = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{j} & i \leq j \\ 1 & i = j+1 \\ 0 & i > j+1 \end{cases}.$$

Pour $j = 1$, c'est vrai. Supposons que c'est vrai pour un $j \geq 1$. On obtient $\|u_j\|^2 = \frac{j+1}{j}$ et donc le coefficient de Fourier

$$\frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} = j/(j+1).$$

On a

$$\begin{aligned} (u_{j+1})_i &= \left(v_{j+1} - \frac{v_{j+1}^T u_j}{\|u_j\|^2} u_j \right)_i \\ &= \left(v_{j+1} - \frac{j}{j+1} u_j \right)_i \\ &= \begin{cases} 0 - \frac{j}{j+1} \frac{(-1)^{j+i}}{j} & i \leq j \\ 1 - \frac{j}{j+1} & i = j+1 \\ 1 - 0 & i = j+2 \\ 0 & i > j+2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{(j+1)+i}}{j+1} & i \leq j+1 \\ 1 & i = j+2 \\ 0 & i > j+2 \end{cases}. \end{aligned}$$

La matrice R'' est

$$R''_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \frac{j}{j+1} & i = j-1 \\ 0 & autrement \end{cases} .$$

Nous avons $A = A''R''$ comme désiré. Afin de normaliser les colonnes de A'', nous multiplions la j-ième colonne u_j de A'' par $||u_j||^{-1}$ et la j-ième ligne de R'' par $||u_j||$. Ceci nous donne

$$A''R'' = \underbrace{A'' \begin{pmatrix} ||u_1||^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & ||u_n||^{-1} \end{pmatrix}}_{=:A'} \underbrace{\begin{pmatrix} ||u_1|| & & \\ & \ddots & \\ & & ||u_n|| \end{pmatrix} R''}_{R'} .$$

Finalement, on a

$$A'_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \left(j(j+1)\right)^{-1/2} & i \leq j \\ \sqrt{\frac{j}{j+1}} & i = j+1 \\ 0 & autrement \end{cases}$$

et

$$R'_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\frac{j-1}{j}} & i = j-1 \\ \sqrt{\frac{j+1}{j}} & i = j \\ 0 & autrement \end{cases} .$$

Pour la matrice A_1, ceci implique que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1/2} & -\sqrt{1/6} & \sqrt{1/12} \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6} & -\sqrt{1/12} \\ 0 & \sqrt{2/3} & \sqrt{1/12} \\ 0 & 0 & \sqrt{3/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{1/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & \sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} \end{pmatrix} .$$

Exercice 10.

1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

2. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, et soient $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ deux fonctionnelles linéairement indépendantes. Montrer que

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2.$$

   Rappel : Si V est un espace vectoriel sur un corps K, son espace dual V^* est l'ensemble des applications linéaires $\phi : V \longrightarrow K$, muni de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles.

Solution. *1. Il s'agit de montrer que $V = W + W^\perp$ et que la décomposition est unique.*

Soit d'abord une base orthonormale de W : $\{b_1, \ldots, b_k\}$, qu'on obtient en appliquant Gram-Schmidt à n'importe quelle base de W. Posons $\Pi(v) = \sum_{i=1}^k \langle b_i, v\rangle b_i$ la projection orthogonale de v sur W. On peut alors décomposer v de la manière suivante.

$$v = \Pi(v) + (v - \Pi(v)) .$$

On vérifie bien sûr que $\Pi(v) \in W$ et que $v - \Pi(v) \in W^\perp$, ce qui montre que $V = W + W^\perp$.

L'unicité de la décomposition découle de l'intersection trivialle des deux ensembles. En effet, si $v \in W \cap W^\perp$, alors $||v||^2 = 0$ et $v = 0$ car le produit scalaire est défini positif.

2. f et g sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, et sont donc représentables dans la base canonique par des matrices F et G de $\mathbb{R}^{1\times n}$. Comme les deux fonctionnelles sont indépendantes, F^T et G^T sont indépendants en tant que vecteurs. De plus, $\ker(f) \cap \ker(g) = \ker \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 2 et son noyau doit donc être de dimension $n - 2$.

Exercice 11. (*) Le but de cet exercice est de montrer l'*inégalité d'Hadamard*, c'est-à-dire

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n ||a_i||_2,$$

pour $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont les colonnes sont $a_1, \ldots, a_n$.

Soit A' la matrice dont les colonnes sont $a_1^*, \ldots, a_n^*$, les vecteurs *non-normalisés* issus de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur les colonnes de A. On rappelle la décomposition $A = A'S$, où S est triangulaire supérieure de diagonale 1.

1. Montrer que $\det(S) = 1$ et que $\det(A) = \det(A') = \pm \prod_{i=1}^n ||a_i^*||_2$.

2. Montrer que $||a_i^*|| \leq ||a_i|| \ \forall i = 1, \ldots, n$, et conclure.

Supposons de surcroît que les coefficients de A soient tous bornés absolument par $M \in \mathbb{R}_+ : |A_{ij}| \leq M \ \forall i, j$. Déduire de l'inégalité d'Hadamard que $|\det(A)| \leq M^n n^{n/2}$.

Solution.