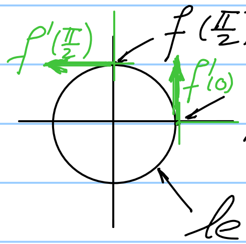
Exemples:

1) $I = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, $r > 0$, $f(t) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))^T \in \mathbb{R}^2$



$f(\frac{\pi}{2}) = (0, r)^T$

$f(0) = (r \cdot \cos(0), r \cdot \sin(0))^T = (r, 0)^T$

le cercle de rayon r est la trace de f.

On a $f'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))^T$

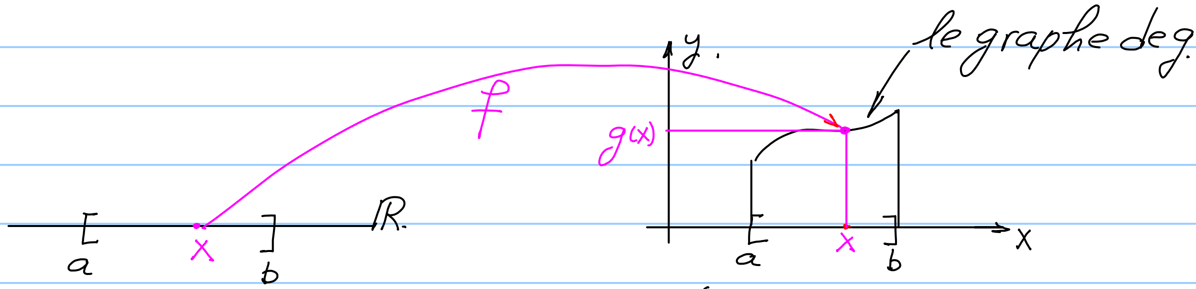
Par exemple $f'(0) = (0, r)^T$

$f'(\frac{\pi}{2}) = (-r, 0)^T$ } voir le dessin (dans des repères locaux)

Puisque $\|f'(t)\| = \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r \cdot \cos(t))^2} = r$
on trouve pour la longueur du chemin

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r.$$

2) Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $a < b$ une fonction continûment dérivable



Le graphe de g est aussi la trace du chemin

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (x, g(x))^T$$

On a $f'(x) = (1, g'(x))^T$ et $\|f'(x)\| = \sqrt{1 + g'(x)^2}$

La longueur du graphe de g est donc

$$\boxed{\ell = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx}$$

longueur du graphe d'une fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

Paramétrisation par la longueur d'arc

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a<b$, une paramétrisation continûment dérivable d'une courbe γ de classe C^1 telle que $\forall t \in [a,b]$, $f'(t) \neq 0$, et soit la fonction $\omega : [a,b] \longrightarrow [0, |\gamma|]$ définie par

$$\omega(t) := \int_a^t \|f'(\tau)\|\, d\tau \quad = \begin{cases} \text{longueur parcourue} \\ \text{jusqu'au temps } t. \end{cases}$$

ω est bijective et de classe C^1, et puisque $\forall t \in [a,b]$, $f'(t) \neq 0$ on a que $\omega'(t) = \|f'(t)\| \neq 0$, et la fonction réciproque $\sigma = \omega^{-1}$ est donc aussi de classe C^1 (voir le Intermezzo).

Définition: le chemin $c(s) = f(\omega^{-1}(s)) = f(\sigma(s))$, $s \in [0, |\gamma|]$ est appelé la paramétrisation canonique de la courbe γ. On a.

$$c'(s) = f'(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) = f'(\sigma(s)) \frac{1}{\omega'(\sigma(s))} = \frac{1}{\|f'(\sigma(s))\|} f'(\sigma(s))$$

Définition: (intégrale curviligne)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une paramétrisation continûment différentiable d'une courbe γ de classe C^1 et soit $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue. L'intégrale

$$W := \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t) \rangle \, dt$$

produit scalaire euclidien dans une copie locale de $\mathbb{R}^m$ en $f(t)$.

est appelée intégrale curviligne de F le long de la courbe γ, et l'on écrit symboliquement

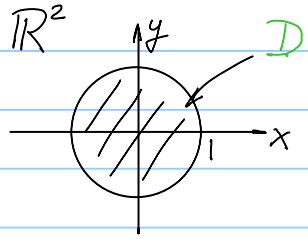
$$W = \int_\gamma F(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \quad \text{(ou similaire).}$$

Remarque: W est indépendant de la paramétrisation au signe de l'orientation près.

4. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

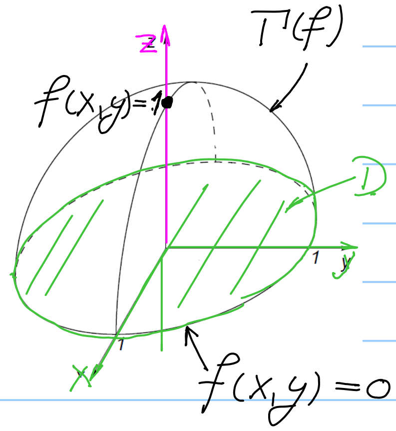
4.1. Introduction, définitions, exemples $(n=2)$

Exemple 1



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$



$Im(f) = [0,1]$ (voir le graphe $\Gamma(f)$)

$$\Gamma(f) = \{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\}$$

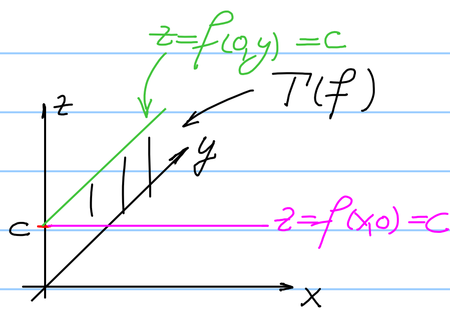
$f(x,y) = 0$, $\forall (x,y)$ t.q. $x^2+y^2=1$

$f(0,0) = 1$

Exemple 2 (important ! voir série 5, échauffement)

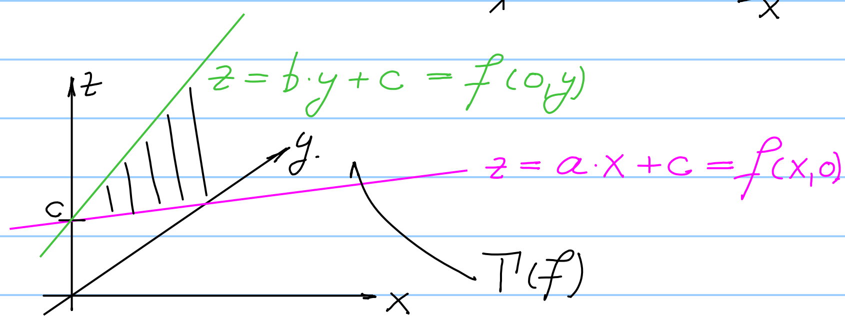
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = a\cdot x + b\cdot y + c$$
, avec $a,b,c \in \mathbb{R}$ donnés.

$$\Gamma(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\}$$



i) $a=b=0$, $f(x,y)=c$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$Im(f) = \{c\} \subset \mathbb{R}$.

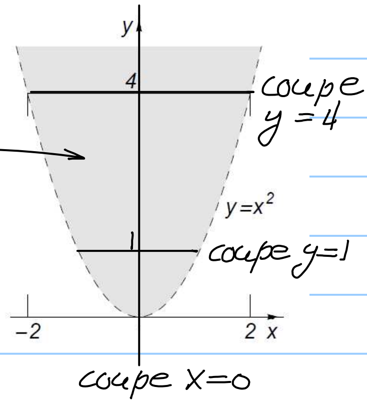


ii) $a \neq 0$ ou $b \neq 0$,

$Im(f) = \mathbb{R}$

Exemple 3

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y \}$$



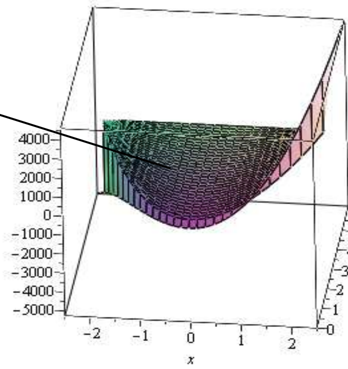
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{xy-1}{\sqrt{y-x^2}}$$

Remarque:

$\boxed{D = \text{"le plus grand sous-ensemble de } \mathbb{R}^2 \text{ sur lequel l'expression } f(x,y) \text{ est bien définie"}}$

A noter que D est un ensemble ouvert et non borné.

$$\Gamma(f) = \{ (x,y,z) \in D \times \mathbb{R} : z = f(x,y) \}$$



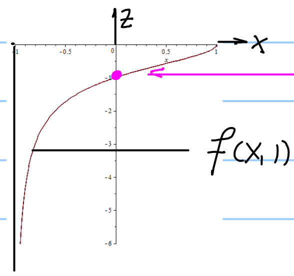
$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$$

4.2. Techniques graphiques

(illustrations pour l'exemple 3)

Coupe à $y=1$

$$f(x,1) = \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \quad x^2 < 1$$

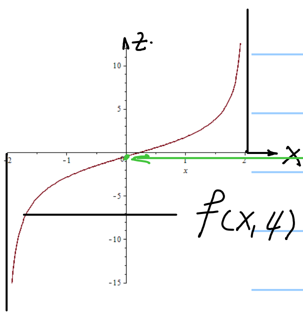


$f(0,1) = -1$

les mêmes points du graphe

Coupe à $y=4$

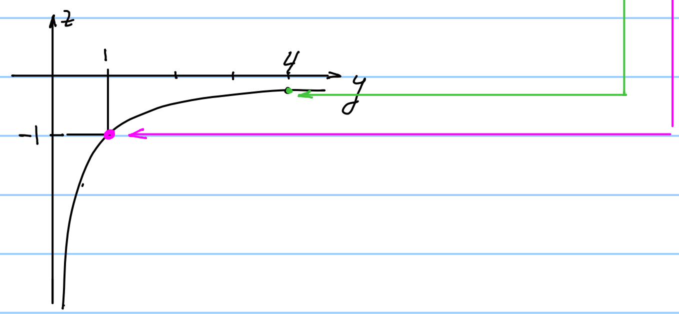
$$f(x,4) = \frac{4x-1}{\sqrt{4-x^2}} \ , \quad x^2 < 4$$



$f(0,4) = \frac{1}{2}$

<u>Coupe à $x = 0$</u>

$$f(0,y) = \frac{-1}{\sqrt{y}} \quad , y > 0$$



<u>4.3. Ensembles de niveau</u>

<u>Définition</u>: soit une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathbb{R}^n$, le domaine de définition de f, et soit $c \in \mathrm{Im}(f)$.
Alors l'ensemble

$$f^{-1}(c) := \{ \underline{x} \in D : f(\underline{x}) = c \} \quad \subset D$$

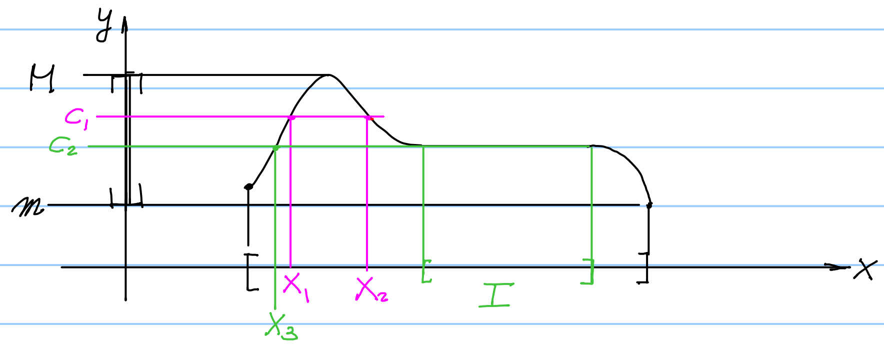
est appelé "<u>l'ensemble de niveau de f" de "niveau c</u>"

<u>Attention (abus de notation)</u>

- ici $f^{-1}(c)$ est un <u>sousensemble</u> de D
- si f est une fonction bijective, $f^{-1}(c)$ est comme d'habitude l'unique élément $\underline{x} \in D$ tel que $f(\underline{x}) = f(f^{-1}(c)) = c$

<u>Exemples</u>

<u>$n = 1$</u>



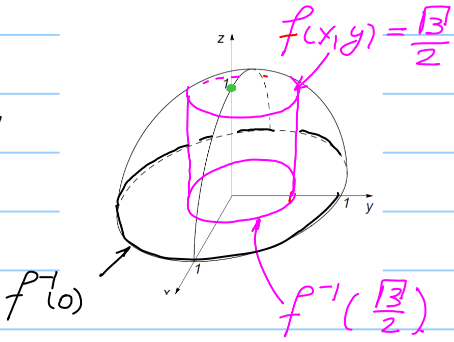
$$f^{-1}(c_1) = \{x_1, x_2\} \qquad f^{-1}(c_2) = I \cup \{x_3\}$$

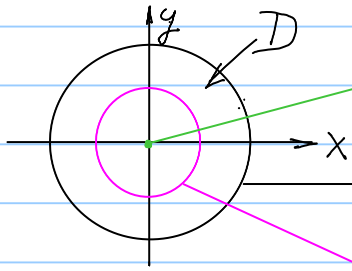
$n=2$: retour aux exemples 1–3 du chapitre 4.1

Exemple 1

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}\,, \quad Im(f) = [0,1]$$





$$f^{-1}(1) = \{(0,0)\}.$$

$$f^{-1}(0) = \{(x,y) \in D : x^2+y^2 = 1\}$$

$$f^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \{(x,y) \in D : x^2+y^2 = \tfrac{1}{4}\}$$

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = 1-x^2-y^2$$

$$\iff x^2+y^2 = \frac{1}{4}$$