Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 6

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ est réelle.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et $u, v \in \mathbb{C}^n$ deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Montrer que u et v sont orthogonaux par rapport au produit hermitien standard.

Exercice 3. Contraposée du théorème spectral.

Soit $\langle .,. \rangle$ le produit hermitien standard sur $\mathbb{C}$ ($\langle x, y\rangle = x^T\bar{y}$), et soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice diagonalisable telle que :

i) chaque valeur propre est réelle, et

ii) pour tout couple (u, v) de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, $\langle u, v\rangle = 0$.

Montrer que A se diagonalise dans une base orthonormale. En déduire que A est hermitienne.

Exercice 4. Soit A la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ telle que P^*AP est une matrice diagonale.

Exercice 5. Soit $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (resp. $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$) tel que les colonnes de U forment une base orthonormale par rapport au produit scalaire standard (resp. par rapport au produit hermitien standard).

1. Montrer que U est une matrice orthogonale (resp. unitaire).
2. Montrer que les lignes de U forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et inversible. Montrer que si toutes les valeurs propres de A sont positives, alors toutes les valeurs propres de A^{-1} sont aussi positives.

Exercice 7. Soit K un corps et $A \in K^{n\times n}$. On note $p(z) := \det(A - zI)$ son polynôme caractéristique qui est de la forme

$$p(z) =: a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

À l'aide de la formule de Leibniz, montrer les propositions suivantes :

1. $a_0 = \det(A)$,
2. $a_n = (-1)^n$,
3. $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$,
4. $a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum\limits_{\substack{I\subseteq\{1,\ldots,n\}\\ |I|=k}} \det(A_I)$,
   pour $1 \leq k \leq n$, et où A_I est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de A d'indice dans I.

Indication pour la question 4 : écrire, pour une permutation $\sigma \in S_n$,

$$\prod_{i=1}^{n}(A - zI)_{i,\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n}(A_{i,\sigma(i)} - z\delta_{i,\sigma(i)}) = \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}} \prod_{i\in I} A_{i,\sigma(i)} \prod_{j\notin I}(-z\delta_{j,\sigma(j)}).$$

Exercice 8. Soit K un corps et $A \in K^{m\times n}, B \in K^{n\times m}$ avec $m \leq n$. On pose p_M le polynôme caractéristique d'une matrice M.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$.
2. En déduire que $p_{BA}(\lambda) = (-1)^{n-m}\lambda^{n-m}p_{AB}(\lambda)$ et donc que les valeurs propres de BA sont exactement les valeurs propres de AB (avec multiplicités égales) avec $n - m$ zéros en plus.

3. En comparant les coefficients de λ^{n-m}, et à l'aide de l'exercice 7, en déduire la *formule de Cauchy-Binet*

$$\det(AB) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I|=m}} \det(A_{[m],I}) \det(B_{I,[m]}).$$

Exercice 9. Soit K un corps, V un K-espace vectoriel et soit $f : V \to V$ une application linéaire supposée diagonalisable.

Définition : un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ est dit *invariant* par f si $f(W) \subseteq W$.

Soit W un sous-espace de V invariant par f. Montrer que la restriction de f à W, $f_{|W} : W \to W$, est également diagonalisable. [1]

Exercice 10. Soient K un corps, V un K-espace vectoriel et f, g deux endomorphismes sur V.

Définition : deux applications linéaires f, g sont *simultanément diagonalisables* s'il existe une base commune de vecteurs propres de f et g.

Montrer que si f et g sont simultanément diagonalisables, alors f et g commutent.

Exercice 11. (*)

Montrer la contraposée de l'exercice 10 : si f et g sont diagonalisables et commutent, alors f et g sont simultanément diagonalisables.

[1] Remarquez que $V = \bigoplus_\lambda E_\lambda$, où les E_λ sont les différents espaces propres. Montrez que $W = \bigoplus_\lambda (E_\lambda \cap W)$.