Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 7 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.

Solution. *A est une matrice symétrique donc il existe une matrice orthogonale P telle que*

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A. Soit D la matrice $P^T AP$ diagonale. Comme A est définie positive, on a $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1 \ldots, n$ et alors $D = C^T C$, où

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Comme $P^T = P^{-1}$, on obtient que

$$A = PDP^T = PC^T CP^T = PC^T P^T PCP^T = (PC^T P^T)(PCP^T) = (PCP^T)^T (PCP^T).$$

ainsi $A = B^T B$, où $B = PCP^T$. Il reste à montrer que B est vraiment symétrique et définie positive. Les valeurs propres de B sont les mêmes de que les valeurs propres de C, donc B est définie positive. De plus,

$$B^T = (PCP^T)^T = (P^T)^T C^T P^T = PCP^T = B.$$

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère des éléments $v_1, \ldots, v_n \in V$ et on suppose qu'il existe $u \in V$ tel que $\langle v_i, u \rangle > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$ pour tout $i \neq j$. Montrer que l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre.

Solution. *On suppose par contradiction qu'on est dans la situation suivante*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j v_j$$

avec $\lambda_i, \mu_j \geq 0$ et on a au moins un i_0 tel que $\lambda_{i_0} > 0$. Alors

$$\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j v_j \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \langle v_i, v_j \rangle \leq 0.$$

Ainsi on a $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$ et par la suite

$$0 = \langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, u \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle v_i, u \rangle \geq \lambda_{i_0} \langle v_{i_0}, u \rangle > 0,$$

ce qui est contradictoire.

Exercice 3. Soit V un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de V. On suppose que $\langle v_i, v_j \rangle \leq 0$ pour tout $i \neq j$ et qu'il existe $x, y \in V$ tel que $\langle x, v_i \rangle > 0$ et $\langle y, v_i \rangle > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\langle x, y \rangle \geq 0$.

Solution. *On suppose par contradiction que $\langle x, y \rangle < 0$ et on applique l'exercice 2 avec $u = x$ à l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_n, -y\}$. Comme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est déjà une base de V, on obtient une contradiction.*

Exercice 4. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3 et $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Pour les matrices $A_i \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ci-dessous et les applications définies par $f_i(x, y) = [x]_B^T A_i \overline{[y]_B}$, cocher ce qui s'applique :

	A_1	A_2	A_3
$f_i(x, y)$ est une forme sesquilinéaire			
$f_i(x, y)$ est une forme hermitienne			

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\cdot i & 3-i \\ 1-2\cdot i & 0 & 2-i \\ 3-i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour les formes hermitiennes, s'il s'agit d'un produit hermitien.

Solution. *En utilisant les propriétés de l'addition et multiplication par un scalaire des matrices, on voit que les trois applications sont sesquilinéaires. Comme A_1 est la seule matrice hermitienne, on déduit que f_1 est la seule forme hermitienne. Ainsi on trouve le tableau suivant:*

	A_1	A_2	A_3
$f_i(x,y)$ *est une forme sesquilinéaire*	*oui*	*oui*	*oui*
$f_i(x,y)$ *est une forme hermitienne*	*oui*	*non*	*non*

Exercice 5. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice $A+B$ sont aussi strictement positives.

Solution. *Comme A et B ont seulement des valeurs propres positives, les formes quadratiques $Q_A(x)$ et $Q_B(x)$ définies par $Q_A(x) = x^T Ax$ et $Q_B(x) = x^T Bx$ sont définies positives. Maintenant, soit Q_{A+B} définie par $Q_{A+B}(x) = x^T(A+B)x$. Alors $Q_{A+B}(x) = Q_A(x) + Q_B(x) > 0$ pour tous vecteurs x non nul, donc Q_{A+B} est une forme définie positive, et cela signifie que la matrice $A+B$ possède seulement des valeurs propres positives.*

Exercice 6. Modifier l'algorithme 3.4 afin qu'il calcule une matrice diagonale congruente complexe par rapport à une matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Appliquer ensuite l'algorithme à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6i & -5+i \\ -6i & 16 & 3+14i \\ -5-i & 3-14i & 12 \end{pmatrix}$$

pour trouver une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $P^T A\bar{P}$ est une matrice diagonale avec des coefficients réels.

Solution. *On se rappelle que deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sont* congruentes complexes *s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $A = P^T \cdot B \cdot \overline{P}$. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. On modifie l'algorithme 3.4 de la manière suivante :*

*Pour $1 \le i \le n$, la i-*ème itération *est comme suit :*

- *S'il existe un indice $j \ge i$ tel que $b_{jj} \neq 0$ soit $j \ge i$ le plus petit tel indice. On échange la i-ème ligne et la j-ème ligne et après la i-ème colonne et la j-ème colonne.*
- *Si $b_{ii} = 0$, soit $j \in \{i+1, \dots, n\}$ tel que $b_{ij} \neq 0$. Si un tel indice n'existe pas on procède à la $i+1$-ème itération. On additionne la ligne j sur la ligne i et on additionne la colonne j sur la colonne i. Étant donné que $(K) \neq 2$, on a alors maintenant $b_{ii} = 2b_{ij} \neq 0$.*

- *Pour chaque $j \in \{i+1, \dots, n\}$: On additionne $-\overline{b_{ij}}/b_{ii}$ fois la i-ème ligne sur la j-ème ligne et on additionne $-b_{ij}/b_{ii}$ fois la i-ème colonne sur la j-ème colonne.*

Lorsqu'on applique cet algorithme à la matrice A donnée, on trouve

$$P^T A \bar{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3i & 2+i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Alors, la solution des moindres carrés $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème $\min_{x \in \mathbb{R}^2} ||Ax - b||^2$ satisfait

- ☐ *a)* $x_2 = 3$.
- ☐ *b)* $x_2 = -3$.
- ☐ *c)* $x_2 = 4$.
- ☐ *d)* $x_2 = -4$.

Solution. *Réponse d). On utilise Gram-Schmidt comme dans le théorème du cours ou bien on résout le système $A^T Ax = A^T b$ pour trouver la solution*

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

De manière alternative, on peut étudier $||Ax - b||^2$ en remplaçant x_2 par 3, -3, 4 et -4, ce qui donne quatre polynômes du second degré avec variable x_1. On trouve alors que le polynôme avec $x_2 = -4$ possède l'unique minimum global minimal parmi les quatre polynômes.

Exercice 8. Pour chaque forme bilinéaire symétrique suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Solution. *a) On a que $Q(x) = x^T Ax$ où $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Le polynôme charactéristique de A est*

$$\det(A - \lambda I) = (13 - \lambda)(7 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = (\lambda - 15)(\lambda - 5)$$

ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$ et $\lambda_2 = 5$. Comme toutes les valeurs propres de A sont positives, A est définie positive, et donc la forme quadratique Q est définie positive.

b) *Similairement,* $Q(x) = x^T Ax$ *où* $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. *Comme en a), on trouve que le polynôme charactéristique de* A *est*

$$\det(A - \lambda I) = (11 - \lambda)(-1 - \lambda) - 64 = \lambda^2 - 10\lambda - 75 = (\lambda - 15)(\lambda + 5)$$

et les valeurs propres de A *sont* $\lambda_1 = 15$ *et* $\lambda_2 = -5$. *Cela signifie que* A *et* $Q(x)$ *sont indéfinies. Pour trouver des vecteurs* x *et* y *qui satisfont* $Q(x) > 0$ *et* $Q(y) < 0$, *on cherche les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres* λ_1 *et* λ_2. *On trouve* $x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Finalement, on vérifie que* x *et* y *sont les vecteurs satisfaisant:*

$$Q(x) = x^T Ax = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{30}{\sqrt{5}} \\ \frac{15}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 15 > 0$$

et similairement

$$Q(y) = y^T Ay = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{5}} \\ \frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -5 < 0.$$

Exercice 9. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

Si U dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\cap S^{n-1}} x^T Ax.$$

Solution. *Soit* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *respectivement. On fixe un entier* k. *Soit* U *un espace de dimension* $n - k + 1$. *Clairement,* $span\{u_1, \ldots, u_k\} \cap (U \cap S^{n-1}) \supsetneq \{0\}$, *alors il existe un vecteur* $0 \neq x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \in (U \cap S^{n-1})$. *Comme*

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_k,$$

on a que $\max_{x\in(U\cap S^{n-1})} x^T Ax \geq \lambda_k$. *Comme c'est vrai pour chaque* U *de dimension* $n - k + 1$, *on conclut que*

$$\min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in(U\cap S^{n-1})} x^T Ax \geq \lambda_k.$$

Si on prend $W = span\{u_k, \ldots, u_n\}$, *pour chaque vecteur* $x = \sum_{i=k}^{n} \beta_i u_i \in W \cap S^{n-1}$ *(c'est-à-dire* $\sum_{i=k}^{n} \beta_i^2 = 1$*), on a*

$$x^T Ax = \sum_{i=k}^{n} \beta_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k$$

et $u_k^T A u_k = \lambda_k$. *Donc* $\max_{x\in W\cap S^{n-1}} x^T Ax = \lambda_k$ *et*

$$\min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\cap S^{n-1}} x^T Ax \leq \max_{x\in W\cap S^{n-1}} x^T Ax = \lambda_k.$$

Finalement, on conclut que $\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x)$.

Exercice 10. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

Montrer que

$$\lambda_k = \max_{dim(U)\leq n-k} \min_{x\in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T Ax,$$

où le maximum est pris sur les sous-espaces U de $\mathbb{R}^n$.

Solution. *Comme on a affaire à un* max min, *nous procédons de la manière suivante.*

Soit un sous-espace $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension $n-k$. Montrons d'abord que

$$\min_{x\in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T Ax \leq \lambda_k.$$

Remarquons que $dim(U^\perp) = k$, et donc que $U^\perp$ s'intersecte non trivialement avec l'espace engendré par $\{u_k, \ldots, u_n\}$, les vecteurs propres du théorème spectral associés aux valeurs $\lambda_n, \ldots, \lambda_k$. Pour n'importe quel vecteur unitaire w dans cette intersection, on trouve explicitement

$$w^T Aw \leq \lambda_k.$$

Il suit alors que

$$\max_{dim(U)=n-k} \min_{x\in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T Ax \leq \lambda_k,$$

et il ne reste plus qu'à trouver un espace vectoriel U explicitement qui réalise le maximum.

Le cours ou la justification de l'exercice 9 ci-dessus nous mènent naturellement à considérer le U tel que $U^\perp = span\{u_1, \ldots, u_k\}$. Celui-ci vérifie $\min_{x\in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T Ax = \lambda_k$, comme voulu.

Pour conclure, si $dim(U) < n-k$, alors $dim(U^\perp) > k$. Il existe donc un V de dimension k tel que $V \subset U^\perp$. Le minimum est ainsi pris sur $U^\perp$, un espace plus grand que V, et sa valeur est alors plus petite.

$$\min_{x\in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T Ax \leq \min_{x\in V \cap S^{n-1}} x^T Ax.$$

Ces plus petits espaces U n'ont donc aucune influence sur le maximum et l'égalité reste vraie si on étend le maximum à tous les espaces U de dimension inférieure ou égale $n-k$.

Exercice 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. On définit l'ordre partiel $\geq$ sur les matrices par

$$R \geq S \text{ sur V} \iff x^T Rx \geq x^T Sx \; \forall x \in V.$$

Posons $N_A(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de A inférieures ou égales à λ. Montrer les équivalences suivantes.

1. $N_A(\lambda) \leq k \iff \lambda_{n-k} > \lambda$, et

2. $N_A(\lambda) \geq k \iff \lambda_{n-k+1} \leq \lambda$.

En déduire, à l'aide des deux exercices précédents, les propositions suivantes.

1. S'il existe un $\delta > 0$ et une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\text{rang}(Q) \leq k$ vérifiant $A \geq (\lambda + \delta)I - Q$ sur $\mathbb{R}^n$, alors $N_A(\lambda) \leq k$.

2. Si pour chaque $\delta > 0$ il existe un sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $\dim(V) \geq k$ vérifiant $A \leq (\lambda + \delta)I$ sur V, alors $N_A(\lambda) \geq k$.

Solution. *Nous montrons uniquement les deux propositions à l'aide des équivalences.*

1. *Il s'agit ici de montrer que $\lambda_{n-k} > \lambda$. Utilisons donc la relation du type* $\max\min$ *d'un autre exercice de cette série. Pour pouvoir conclure, il faut alors trouver un espace vectoriel U de dimension au plus k tel que*

$$\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x > \lambda.$$

   L'hypothèse sur A nous donne

$$x^T A x \geq \lambda + \delta - x^T Q x,$$

   pour n'importe quel x unitaire de $U^\perp$.

   Prenons donc $U = \text{Im}\,(Q)$, de sorte que $U^\perp = \ker(Q^T)$. Par suite, on a

$$\lambda_{n-k} \geq \min_{x \in \ker(Q^T) \cap S^{n-1}} x^T A x \geq \lambda + \delta > \lambda,$$

   ce qui conclut.

2. *Montrons que $\lambda_{n-k+1} \leq \lambda$. Par le même raisonnement que ci-dessus, et grâce à un autre exercice de cette série,*

$$\max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \geq \lambda_{n-k+1},$$

   pour n'importe quel sous-espace U de dimension k.

   Or, par hypothèse,

$$x^T A x \leq \lambda + \delta,$$

   pour tout $\delta > 0$ et x unitaire de V. En restreignant V à un sous-espace U de dimension k, on trouve bien,

$$\lambda_{n-k+1} \leq \max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \max_{x \in V \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda + \delta.$$

   L'inégalité étant vraie pour tout $\delta > 0$, le résultat est démontré.

Exercice 12. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique.

Montrer, à partir d'un résultat de la série 6 [1], que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont positifs ou nuls, c'est-à-dire $\det(A_I) \geq 0$ pour tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Solution.

[1] Le coefficient $n-k$ du polynôme caractéristique de A vérifie

$$a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} \det(A_I),$$

où A_I est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de A d'indice dans I.