Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 7

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On considère des éléments $v_1, \ldots, v_n \in V$ et on suppose qu'il existe $u \in V$ tel que $\langle v_i, u\rangle > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\langle v_i, v_j\rangle \leq 0$ pour tout $i \neq j$. Montrer que l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est libre.

Exercice 3. Soit V un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de V. On suppose que $\langle v_i, v_j\rangle \leq 0$ pour tout $i \neq j$ et qu'il existe $x, y \in V$ tel que $\langle x, v_i\rangle > 0$ et $\langle y, v_i\rangle > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\langle x, y\rangle \geq 0$.

Exercice 4. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3 et $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Pour les matrices $A_i \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ci-dessous et les applications définies par $f_i(x, y) = [x]_B^T A_i \overline{[y]_B}$, cocher ce qui s'applique :

	A_1	A_2	A_3
$f_i(x, y)$ est une forme sesquilinéaire			
$f_i(x, y)$ est une forme hermitienne			

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\cdot i & 3-i \\ 1-2\cdot i & 0 & 2-i \\ 3-i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour les formes hermitiennes, s'il s'agit d'un produit hermitien.

Exercice 5. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice $A+B$ sont aussi strictement positives.

Exercice 6. Modifier l'algorithme 3.4 afin qu'il calcule une matrice diagonale congruente complexe par rapport à une matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Appliquer ensuite l'algorithme à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6i & -5+i \\ -6i & 16 & 3+14i \\ -5-i & 3-14i & 12 \end{pmatrix}$$

pour trouver une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle que $P^T A \bar{P}$ est une matrice diagonale avec des coefficients réels.

Exercice 7. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Alors, la solution des moindres carrés $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème $\min_{x\in\mathbb{R}^2} ||Ax-b||^2$ satisfait

- ☐ *a)* $x_2 = 3$.
- ☐ *b)* $x_2 = -3$.
- ☐ *c)* $x_2 = 4$.
- ☐ *d)* $x_2 = -4$.

Exercice 8. Pour chaque forme bilinéaire symétrique suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Exercice 9. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

Si U dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\cap S^{n-1}} x^T A x.$$

Exercice 10. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

Montrer que

$$\lambda_k = \max_{dim(U)\leq n-k} \min_{x\in U^\perp\cap S^{n-1}} x^T A x,$$

où le maximum est pris sur les sous-espaces U de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. On définit l'ordre partiel $\geq$ sur les matrices par

$$R \geq S \text{ sur V} \iff x^T R x \geq x^T S x \; \forall x \in V.$$

Posons $N_A(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de A inférieures ou égales à λ. Montrer les équivalences suivantes.

1. $N_A(\lambda) \leq k \iff \lambda_{n-k} > \lambda$, et
2. $N_A(\lambda) \geq k \iff \lambda_{n-k+1} \leq \lambda$.

En déduire, à l'aide des deux exercices précédents, les propositions suivantes.

1. S'il existe un $\delta > 0$ et une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\text{rang}(Q) \leq k$ vérifiant $A \geq (\lambda + \delta)I - Q$ sur $\mathbb{R}^n$, alors $N_A(\lambda) \leq k$.
2. Si pour chaque $\delta > 0$ il existe un sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $\dim(V) \geq k$ vérifiant $A \leq (\lambda + \delta)I$ sur V, alors $N_A(\lambda) \geq k$.

Exercice 12. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique.

Montrer, à partir d'un résultat de la série 6 [1], que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont positifs ou nuls, c'est-à-dire $\det(A_I) \geq 0$ pour tout $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

[1] Le coefficient $n - k$ du polynôme caractéristique de A vérifie

$$a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = k}} \det(A_I),$$

où A_I est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de A d'indice dans I.