Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 8 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique semi-définie positive.

a) Montrer que les éléments diagonaux a_{ii} de A sont tous positifs ou nuls.

b) Montrer que $a_{ii}a_{jj} \geq a_{ij}^2\ \forall i,j$. En déduire que si $a_{ii} = 0$ pour un certain indice i, alors la i-ème ligne et la i-ème colonne de A sont nulles.

c) Montrer que si $a_{ii}a_{jj} = a_{ij}^2$ pour une certaine paire d'indices i, j distincts, alors A est singulière.

d) Montrer que si $x^T Ax = 0$, alors $Ax = 0$.

Solution.

a) $a_{ii} = e_i^T A e_i \geq 0$.

b) Par le critère de Sylvester, toutes les mineurs symétriques sont positifs. En particulier, pour $I = \{i, j\}$,

$$\det(A_I) = \det \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{pmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 \geq 0.$$

c) Si l'égalité est vérifiée, le mineur ci-dessus est nul. Ainsi A ne peut pas être définie positive (strictement), par contraposée du théorème de Sylvester.

A est donc semi-définie positive mais pas définie positive : elle admet 0 comme valeur propre. Il suit naturellement que A est singulière (le noyau de la matrice n'est pas trivial).

d) Soit $\{u_i\}_i$ la base orthonormale de vecteurs propres de A donnée par le théorème spectral, et soit $\{\lambda_i\}_i$ les valeurs correspondantes. On écrit $x \in \mathbb{R}^n$ dans cette base et on calcule sont image par la forme quadratique :

$$x = \sum_i \alpha_i u_i \implies x^T Ax = \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i.$$

Cette somme de valeur positives n'est nulle que si les coordonnées α_i correspondantes aux valeurs λ_i strictement positives sont nulles.

Dès lors, l'égalité $x^T Ax = 0$ implique que x s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs propres associés à la valeur nulle. x appartient donc à l'espace propre associé à 0, qui n'est autre que $\ker(A)$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne définie positive, et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur unitaire. Montrer que $(x^*Ax)^{-1} \leq x^*A^{-1}x$ avec égalité si et seulement si x est un vecteur propre de A.

Indices : Exprimer les images x^*Ax et $x^*A^{-1}x$ dans une base orthonormale de vecteurs propres de A. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$ pour des réels a_i, b_i bien choisis.

Solution. *Soit $\{u_i\}_i$ la base orthonormale de vecteurs propres de A donnée par le théorème spectral, et soit $\{\lambda_i\}_i$ les valeurs correspondantes. Remarquons que*

$$Au_i = \lambda_i u_i \iff A^{-1}u_i = \lambda_i^{-1}u_i,$$

et donc que la même base orthonormale est constituée de vecteurs propres de A^{-1} associés aux valeurs λ_i^{-1}.

Soit désormais $x = \sum_i \alpha_i u_i \in \mathbb{C}^n$ quelconque unitaire. En particulier $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$.

On a alors respectivement

$$x^*A^{-1}x = \sum_i |\alpha_i|^2 \lambda_i^{-1}, \quad x^*Ax = \sum_i |\alpha_i|^2 \lambda_i.$$

Il s'agit désormais d'exprimer ces sommes comme des normes de vecteurs réels bien choisis.

Prenons, à cette fin, les vecteurs v, w tels que $v_i = |\alpha_i|\lambda_i^{-1/2}$ et $w_i = |\alpha_i|\lambda_i^{1/2}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique donc

$$(x^*A^{-1}x)(x^*Ax) = ||v||^2||w||^2 \geq \langle v, w\rangle.$$

En outre, le produit scalaire se simplifie agréablement.

$$\langle v, w\rangle = \sum_i v_i w_i = \sum_i |\alpha_i|^2 = 1.$$

L'inégalité est donc vérifiée.

Étudions désormais quand celle-ci devient égalité. Ceci arrive dès que v et w sont colinéaires, par l'énoncé de Cauchy-Schwarz. Dans ce cas, $v = cw$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$, qui implique

$$|\alpha_i|\lambda_i^{-1/2} = c|\alpha_i|\lambda_i^{1/2}\ \forall i \iff |\alpha_i|(c\lambda_i - 1) = 0\ \forall i.$$

Comme $|\alpha_i|$ n'est pas nul pour tout i, on doit avoir $c = \lambda^{-1}$ pour une certaine valeur propre λ. Dès lors, $|\alpha_i| = 0$ pour tous les indices i tels que $\lambda_i \neq \lambda$. Par conséquent, x appartient à l'espace propre associé à la valeur λ et est donc un vecteur propre.

Exercice 3. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que $||Ax||_2 \leq ||A||_F||x||_2$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. En déduire que $||AB||_F \leq ||A||_F||B||_F$.

Solution. *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soit $x \in \mathbb{C}^n$. On commence par montrer que*

$$||Ax||_2 \leq ||A||_F||x||_2.$$

Soient $A_1, \cdots, A_n$ les lignes de A. On a

$$\begin{aligned}
||Ax||_2 &= \left\| \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_n x \end{pmatrix} \right\|_2 \\
&= \sqrt{\langle A_1^\intercal, x\rangle^2 + \cdots + \langle A_n^\intercal, x\rangle^2} \\
&\leq \sqrt{||A_1||_2^2||x||_2^2 + \cdots + ||A_n||_2^2||x||_2^2} \\
&= \sqrt{||A_1||_2^2 + \cdots + ||A_n||_2^2}||x||_2 \\
&= ||A||_F||x||_2,
\end{aligned}$$

où l'inégalité découle de Cauchy-Schwarz.

Soit $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient $b_1, \cdots, b_n$ les colonnes de la matrice B. Alors

$$\begin{aligned}
||AB||_F &= \left\| \begin{pmatrix} Ab_1 & \cdots & Ab_n \end{pmatrix} \right\|_F \\
&= \sqrt{||Ab_1||_2^2 + \cdots + ||Ab_n||_2^2} \\
&\leq \sqrt{||A||_F^2||b_1||_2^2 + \cdots + ||A||_F^2||b_n||_2^2} \quad \textit{par la première partie} \\
&= ||A||_F\sqrt{||b_1||_2^2 + \cdots + ||b_n||_2^2} \\
&= ||A||_F||B||_F.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Montrer que le polynôme caractéristique de A est réel.

Définissons la norme de Frobenius sur $\mathbb{C}^{n\times n}$ par $||A||_F^2 := \sum_{ij} |A_{ij}|^2$. Montrer que $||A||_F^2 = \mathrm{Tr}(A^2)$, et en déduire que si $|\mathrm{Tr}(A)| < ||A||_F$, alors A est indéfinie.

Solution. *Premièrement, le polynôme caractéristique se scinde sur $\mathbb{R}$ et il est donc réel.*

$$p_A(x) = (-1)^n \prod_i (x - \lambda_i),$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i$.

Deuxièmement, on a bien

$$Tr(A^2) = \sum_{ij} A_{ij}A_{ji} = \sum_{ij} |A_{ij}|^2 = ||A||_F^2.$$

On en déduit que si $|Tr(A)| < \|A\|_F$, et en notant λ_i la i-ème valeur propre de A, on a

$$|Tr(A)|^2 < Tr(A^2) \iff |\sum_i \lambda_i|^2 < \sum_i \lambda_i^2, \tag{1}$$

car la i-ème valeur propre de A^2 est λ_i^2.

Remarquons que les valeurs propres de A sont réelles, et donc que $|\sum_i \lambda_i|^2 = (\sum_i \lambda_i)^2$.

Il suit de l'inégalité (1) qu'un des termes croisés vérifie $\lambda_i\lambda_j < 0$. A n'est donc ni semi-définie positive, ni semi-définie négative car elle admet une valeur propre strictement positive, et une autre strictement négative.

Exercice 5. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6, donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution.

(i) $A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ *et les valeurs propres sont $\lambda_1 = 9$, et $\lambda_2 = 1$ (on veut $\lambda_1 \geq \lambda_2$). Ainsi les valeurs singulières de A_1 sont données par $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, i.e. $\sigma_1 = 3$ et $\sigma_2 = 1$.*

(ii) $A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et la seule valeur singulière est $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5$.*

(iii) $A_3^T A_3 = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}$ *et le polynôme caractéristique est*

$$p_{A_3^T A_3}(\lambda) = \lambda^2 - 100\lambda + 900 = (\lambda - 90)(\lambda - 10).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 90$ et $\lambda_2 = 10$. Les valeurs singulières de A_3 sont $\sigma_1 = 3\sqrt{10}$ et $\sigma_2 = \sqrt{10}$, ainsi la matrice $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 sont

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. *On commence par trouver une base orthonormée* (v_1, v_2, v_3) *de* $\mathbb{R}^3$, *où pour* $i = 1, 2$ *on sait que*

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A u_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On doit donc trouver un vecteur v_3 *normalisé et orthogonal à* v_1 *et* v_2. *On trouve, par exemple,*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on vérifie que

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(iv) $A_4^T A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 3$ *et* $\lambda_2 = 2$. *Les valeurs singulières de* A_3 *sont* $\sigma_1 = \sqrt{3}$ *et* $\sigma_2 = \sqrt{2}$, *ainsi la matrice* $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *est donnée par*

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 *et* λ_2 *sont*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$*. On commence par trouver*

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A u_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a que (v_1, v_2) *n'est pas une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$*, on doit donc trouver un vecteur* v_3 *normalisé et orthogonal à* v_1 *et* v_2*. On trouve, par exemple,*

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(v) On a $A_5^T A_5 = (9)$ *et avec comme seule valeur propre* $\lambda_1 = 9$*. Le vecteur propre normalisé associé à* $\lambda_1 = 9$ *est* $v_1 = 1$*. Ainsi* $Q = (1)$*. La matrice* $D \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ *est donnée par* $D = (3 \ \ 0 \ \ 0)^T$*. Pour la matrice* P*, on commence par trouver*

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A_5 u_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant compléter (v_1) *en une base orthonormée* (v_1, v_2, v_3) *de* $\mathbb{R}^3$*. On complète* (v_1) *par* $v_2 = \frac{1}{3}(2 \ \ -1 \ \ 2)^T$ *et* $v_3 = \frac{1}{3}(2 \ \ 2 \ \ -1)^T$*. On obtient*

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(vi) On calcule la SVD de $(A_6)^T$*. On commence par calculer*

$$(A_6^T)^T A_6^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1 = 25$ *et* $\lambda_2 = 9$*. La matrice* D *est*

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 *et* λ_2 *sont*

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs v_1 *et* v_2 *sont donnés par*

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On complète en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ *avec*

$$v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a que $A^T = PDQ$. *La SVD pour* A *est donnée par* $A = (PDQ)^T = Q^T D^T P^T$.

Exercice 6. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.

2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Solution.

1. *C'est vrai. Pour trouver une décomposition en SVD, on doit diagonaliser* A^TA, *où* $A^TA = I_n$. *Ainsi, les valeurs propres sont* $\lambda_i = 1$ *et les vecteurs propres de* A^TA *sont les vecteurs* e_i *de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$, *ainsi* $Q = I_n$. *La matrice* $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est diagonale avec les* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ *sur la diagonale. Ainsi,* $D = I_n$ *et on obtient*
$$A = PDQ = PI_nI_n,$$
et la seule solution pour la matrice P *est* $P = A$.

2. *C'est faux. En effet, les valeurs singulières sont toujours positives, et on les obtient avec* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$, *où* λ_i *sont les valeurs propres de* A. *Les valeurs singulières sont les valeurs absolues des valeurs propres non nulles* λ_i.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que sa plus grande valeur singulière σ_1 domine toutes ses valeurs propres λ : $\sigma_1 \geq |\lambda|$.

Solution. *Par définition, σ_1^2 est la plus grande valeur propre de A^*A et vérifie par conséquent*

$$\sigma_1^2 = \max_{x\in S^{n-1}} x^*A^*Ax = \max_{x\in S^{n-1}} ||Ax||^2.$$

Pour n'importe quel vecteur propre u unitaire de A associé à une valeur propre λ, on a donc

$$\sigma_1^2 \geq ||Au||^2 = ||\lambda u||^2 = |\lambda|^2,$$

qui conclut.

Exercice 8. Calculer la matrice pseudo-inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. *On commence par trouver une décomposition en valeurs singulières de A^T, $A^T = PDQ$, car cela simplifie les calculs. On trouve $AA^T = (3)$, donc $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $Q = 1$. Par conséquent, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ et on trouve v_2, v_3 orthonormaux. Par exemple*

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   On pose $P := \begin{pmatrix} v_1, v_2, v_3 \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale, et on vérifie qu'on a bien $A^T = PDQ$. Par suite, $A = Q^TD^TP^T$ et

$$A^+ = P(D^T)^+Q = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. *On a*

$$B^*B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$. Une base orthonormée de l'espace propre associé à la valeur λ_1 est donnée par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur propre associé à λ_3 est

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pour terminer, on calcule

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} ,$$

avec

$$v_1 = \frac{Bu_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ v_2 = \frac{Bu_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$B^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

3. *On a*

$$C^* C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

avec polynôme caractéristique $p_{C^*C}(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$. On a donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 0$. On cherche les vecteurs propres associés aux valeurs propres. Pour $\lambda_1 = 2$ on trouve

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

et pour $\lambda_2 = 0$ on trouve

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Après on calcule

$$v_1 = Cu_1/\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On complète v_1 avec v_2 pour former une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, et donc

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$C^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 9. Trouver, à l'aide de la pseudo-inverse, la solution minimale des trois systèmes d'équations:

$$1.\ x_1 + x_2 = b_1 , \quad 2. \begin{cases} x_1 = b_1 , \\ x_1 = b_2 , \\ x_1 = b_3 , \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 4x_1 = b_1 , \\ 0x_1 = b_2 , \\ 7x_3 = b_3 , \\ 0x_2 = b_4 . \end{cases}$$

Solution. *Soit $A \in K^{m\times n}$, $x \in K^{n\times 1}$, $b \in K^{m\times 1}$. La solution minimale du système $Ax = b$, est donnée par $x^+ = A^+ b$. Elle satisfait $||Ax^+ - b||_2 \leq ||Ax - b||_2$, $\forall x \in K^{n\times 1}$.*

1. *La matrice associée au premier système est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = 1 , \ D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} , \ Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix} .$$

2. *La matrice associée au deuxième système est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = 1\,.$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3)\,.$$

3. La matrice associée au troisième système est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \begin{pmatrix} b_1/4 \\ 0 \\ b_3/7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ et $B \in K^{n\times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+A^+$?

Solution. *La réponse est non. On prouve cela avec un contre-exemple. On considère*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

On trouve

$$A^+ = (AB)^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

et

$$B^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \ .$$

On a donc

$$(AB)^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \neq B^+A^+ = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Exercice 11. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$ on a

$$\max_{\substack{x\in S^{n-1} \\ x\perp u_1,\dots,x\perp u_\ell}} x^T Ax = \lambda_{\ell+1}$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.

Solution.