Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 9 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $D \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ et $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que

$$A = PDQ$$

est une décomposition en valeurs singulières de A. Montrer que $A^* = Q^* D^T P^*$ est une décomposition en valeurs singulières de A^*.

Solution. *En correspondance avec la définition de la décomposition en valeurs singulières, il s'agit d'abord de montrer que Q^* et P^* sont unitaires. Un exercice d'une série précédente nous permet de vérifier cela simplement.*

De plus, A^* est réelle si et seulement si A est réelle. Dans ce cas, Q^* et P^* sont également réelles, ce qui conclut.

Exercice 2. Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ||Ax - b||^2.$$

Calculer le gradient de f et en déduire qu'une solution optimale du problème des moindres carrés est aussi solution de l'équation $A^T Ax = A^T b$.

Solution. *Un calcul direct montre que le gradient de f est donné par $2A^T Ax - 2A^T b$. On conclut par un théorème d'Analyse II.*

Exercice 3. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ de dimension 1 atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a\in M} \operatorname{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Solution. *Soit A la matrice dont les lignes sont les points de M, i.e.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par un théorème du cours, nous devons trouver une décomposition

$$A^T A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) U^T,$$

et la colonne de U correspondant à la valeur propre la plus grande engendrera le sous-espace voulu. Ainsi, on diagonalise $A^T A$:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 26 & -20 \\ -20 & 26 \end{pmatrix} \\ \det(A^T A - \lambda I) &= (26 - \lambda)^2 - 400 \\ &= (\lambda - 46)(\lambda - 6) \\ \Rightarrow \qquad A^T A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 & \\ & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc le sous-espace $H = \{t\binom{1}{-1} \mid t \in \mathbb{R}\}$ est le sous-espace voulu et la valeur D est

$$D = \sum_{a \in M} \operatorname{dist}(a, H) = \sum_{a \in M} ||a||^2 - \frac{1}{2} \left(a^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^2 = 52 - 46 = 6.$$

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 13/10 & 9/10 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 13/10 & 9/10 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1, 2$, calculer l'approximation A_k de rang k de A, vue dans le cours, ainsi que les quantités suivantes

$$||A - A_1||_F, \qquad ||A - A_1||_2, \qquad ||A - A_2||_F, \qquad ||A - A_2||_2.$$

Solution. *On calcule d'abord les valeurs singulières :*

$$A^T A = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 13 & 5 & 13 & 5 \\ 9 & 15 & 9 & 15 \\ 10 & -10 & -10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 9 & 10 \\ 5 & 15 & -10 \\ 13 & 9 & -10 \\ 5 & 15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.88 & 3.84 & 0 \\ 3.84 & 6.12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \det(A^T A - \lambda I) = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & (4 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (3, 2, 1). \end{aligned}$$

Puisqu'on ne s'intéresse qu'à A_1 et A_2, on ne doit calculer que les deux premiers vecteurs propres :

$$(A^TA - 9I)u_1 = 0 \qquad\qquad (A^TA - 4I)u_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5.12x + 3.84y &= 0 \\ 3.84x - 2.88y &= 0 \\ -5z &= 0 \end{cases} \qquad\qquad \Rightarrow \begin{cases} -0.12x + 3.84y &= 0 \\ 3.84x + 2.12y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors on calcule v_1 et v_2 :

$$v_1 = \frac{Au_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad\qquad v_2 = \frac{Au_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

et on trouve

$$A_1 = \sigma_1 v_1 u_1^T = 3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = A_1 + \sigma_2 v_2 u_2^T = 2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 6/5 & 1 \\ 9/10 & 6/5 & -1 \\ 9/10 & 6/5 & -1 \\ 9/10 & 6/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que la norme matricielle $||\cdot||_2$ est définit comme

$$||A||_2 = \max_{x:\ ||x||_2=1} ||Ax||_2$$

avec la norme euclidienne habituelle au côté droit. Avec la notation du cours, on a

$$A - A_k = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i v_i u_i^T.$$

Comme les vecteurs u_i forment une base orthonormée, tout vecteur unitaire x peut être représenté comme une combination linéaire de ces vecteurs, c'est-à-dire $x = \sum \lambda_i u_i$, avec des coefficients α_i tels que $\sum \alpha_i^2 = 1$. Les vecteurs v_i forment également une base orthonormée, donc

$$||(A - A_k)x||_2^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i v_i u_i^T (\textstyle\sum \alpha_i u_i) \right\|_2^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i \alpha_i v_i u_i^T u_i \right\|_2^2$$

$$= \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2 \alpha_i^2 \, ||v_i||_2^2 \leq \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i^2 \leq \sigma_{k+1}^2.$$

Mais on voit facilement que cette borne est atteinte par $x = v_{k+1}$. Par conséquent, $||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1}$, et les normes sont :

$$||A - A_1||_2 = 2, \qquad ||A - A_2||_2 = 1.$$

On observe que les valeurs singulières de $(A - A_k)$ sont $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_r$, donc on utilise le lemme 5.23. des notes pour obtenir

$$||A - A_1||_F = \left(\sum_{i=2}^{3} \sigma_i^2\right)^{1/2} = \left(\sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)^{1/2} = \sqrt{5},$$
$$||A - A_2||_F = \left(\sum_{i=3}^{3} \sigma_i^2\right)^{1/2} = \left(\sigma_3^2\right)^{1/2} = 1.$$

Exercice 5.

1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i^T la i-ème ligne de Q. Montrer que
$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^T.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a
$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T.$$

3. Conclure que l'on peut représenter A comme
$$A = URV, \qquad U \in \mathbb{R}^{m\times r},\ R \in \mathbb{R}^{r\times r},\ V \in \mathbb{R}^{r\times d},$$
où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.

Solution.

1. *Soit M_{ij} la matrice telle que $(M_{ij})_{ij} = 1$, et $(M_{ij})_{st} = 0$ si $(s,t) \neq (i,j)$. Alors, on peut réécrire $p_k q_k^T = \sum_i \sum_j p_{ik} q_{kj} M_{ij}$, et donc*
$$\begin{aligned}\sum_k p_k q_k^T &= \sum_k \sum_i \sum_j p_{ik} q_{kj} M_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j \underbrace{\sum_k p_{ik} q_{kj}}_{(PQ)_{ij}} M_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j (PQ)_{ij} M_{ij} \\ &= PQ.\end{aligned}$$

2. *On définit $Q' = DQ$, c'est-à-dire que l'on multiplie les lignes de Q par les valeurs singulières : $q_i'^T = \sigma_i q_i^T$. Ainsi,*

$$A = PDQ = PQ' = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i'^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_i q_i^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T,$$

où la dernière égalité suit du fait que $\sigma_i = 0$ pour $i > r$.

3. *Dans la partie (2) on a vu qu'en fait il suffit de considérer les premières r colonnes de P et les premières r lignes de Q'. Il ne reste qu'à observer qu'on obtient les premières r lignes de Q', si l'on multiplie la sous-matrice des premières r lignes de Q par une matrice diagonale $r \times r$ avec les valeurs singulières sur la diagonale.*

Exercice 6. Soient $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-espaces vectoriels et $k = \dim(G) > \dim(H)$. Montrer que G possède une base orthonormale $\{w_1, \dots w_k\}$ tel que $w_k \perp H$.

Solution. *Soient $\{h_1, \dots, h_l\}$ une base de H et $\{g_1, \dots, g_k\}$ une base de G. On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} h_1^T \\ \vdots \\ h_l^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_k \end{pmatrix}$$

de taille $l \times k$. Par le théorème noyau-image on voit que $\ker(A) \neq \varnothing$. Soit $x \in \ker(A)$ alors on observe que $w_k = \sum_{i=1}^{k} x_i g_i$ est orthogonal à H et on utilise ce vecteur pour conclure l'exercice.

Exercice 7. On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 2 & * & & & & & & & & \\ & 2 & * & & & & & & & \\ & & 4 & * & & & & & & \\ & & & 4 & * & & & & & \\ & & & & 6 & * & & & & \\ & & & & & 6 & * & & & \\ & & & & & & 6 & * & & \\ & & & & & & & 6 & * & \\ & & & & & & & & 6 & * \\ & & & & & & & & & 6 \end{pmatrix}$$

en forme normale de Jordan. Déterminer les chiffres derrière les étoiles en sachant que

$$\dim(\ker(J - 2I)) = 1, \ \dim(\ker(J - 4I)) = 2$$

$$\dim(\ker(J - 6I)) = 3, \ \dim(\ker((J - 6I)^2)) = 5, \ \dim(\ker((J - 6I)^3)) = 6.$$

Solution. *Modulo l'ordre des blocs de Jordan on obtient la matrice suivante*

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & & & \\ & 2 & 0 & & & & & & & \\ & & 4 & 0 & & & & & & \\ & & & 4 & 0 & & & & & \\ & & & & 6 & 1 & & & & \\ & & & & & 6 & 1 & & & \\ & & & & & & 6 & 0 & & \\ & & & & & & & 6 & 1 & \\ & & & & & & & & 6 & 0 \\ & & & & & & & & & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $\ker(A^i) = \ker(A^{i+1}) \neq \mathbb{C}^n$. Montrer que A n'est pas une matrice nilpotente.

Donner un exemple d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ pour laquelle on observe une stabilisation du noyau à partir de sa troisième puissance.

Solution. *Si on démontre que le noyau des puissances de la matrice A devient stable et reste différent de $\mathbb{C}^n$ on a gagné puisque dans ce cas A n'est pas nilpotente. Montrons* $\ker(A^{i+2}) = \ker(A^i)$. *L'inclusion* $\ker(A^{i+2}) \supseteq \ker(A^i)$ *est toujours vérifiée. Prenons donc $x \in \ker(A^{i+2})$ alors $0 = A^{i+2}x = A^{i+1}Ax$ et ceci implique que Ax appartient à $\ker(A^{i+1}) = \ker(A^i)$. Ainsi $x \in \ker(A^{i+1}) = \ker(A^i)$ et $\ker(A^{i+2}) = \ker(A^i)$. On termine l'argument par récurrence.*

Comme exemple on peut considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. (*) Soient $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Pour $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$, on considère la droite $L_{z,v}$ définie par

$$L_{z,v} = \{z + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = z + \operatorname{span}\{v\}.$$

Soit $d(a_i, L_{z,v})$ la distance de a_i à $L_{z,v}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

(i) Supposons que $\sum_{i=1}^m a_i = 0$. Montrer que $\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \geq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{0,v})^2$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Conclure que, étant donnés des points $a_1, \ldots, a_m$, on peut trouver un $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$ tels que

$$\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \leq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z',v'})^2,$$

pour tout $z' \in \mathbb{R}^n$ et $v' \in S^{n-1}$. En particulier :

(a) Donner une formule pour z.

(b) Décrire la matrice A telle qu'un vecteur propre normalisé de $A^T A$ associé à la valeur propre la plus grande est une solution pour v.

Solution.