Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 11

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Exercice 2. Montrer le lemme 6.3. du polycopié.

On considère le système suivant

$$\begin{array}{rcllcl} \mathrm{x}_1'(t) & = & a_{11}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{1n}\mathrm{x}_n(t) \\ \mathrm{x}_2'(t) & = & a_{21}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{2n}\mathrm{x}_n(t) \\ & \vdots & & & \\ \mathrm{x}_n'(t) & = & a_{n1}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{nn}\mathrm{x}_n(t) \end{array} \tag{1}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{X} = \{\mathrm{x} \colon \mathrm{x} \text{ est une solution du système (1)}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Exercice 4. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^BP$.

Exercice 5. Montrer que $e^{A+B} = e^Ae^B$ si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ commutent. En déduire que $e^\bullet$ est une application de $\mathbb{C}^{n\times n}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Trouver deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que $e^{A+B} \neq e^Ae^B$.

Exercice 6. Trouver la solution du système $x' = Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Considérons l'équation différentielle de second ordre où $\lambda > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = \alpha \text{ et } u'(0) = \beta. \end{cases} \tag{2}$$

1. Reformuler le problème en une équation en dimension 2 de la forme $x' = Ax$ avec $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
2. Calculer e^{At} et en déduire la solution u du problème initial (2).

Formules : $\cos(x) = \sum\limits_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ et $\sin(x) = \sum\limits_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, et J sa forme normale de Jordan.

Montrer que les valeurs propres de e^J sont de la forme e^λ, où λ est une valeur propre de J. Montrer que les multiplicités algébriques de e^λ et λ sont égales et en déduire que

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

En déduire que l'application $e^\bullet$ de $\mathbb{R}^{n \times n}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective. Est-elle injective?

Exercice 9. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que $A = -A^T$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$.

Montrer que la matrice e^A est orthogonale et que la matrice e^B appartient à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Trouver e^{tA} pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Utiliser ceci pour trouver la solution du système $x' = Bx$ où

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. On considère un système différentiel $x' = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que, dans une solution $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}^T$ chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.

Exercice 12. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m est diagonalisable pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

Donner un contre-exemple lorsque A n'est pas inversible.