Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 11 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Solution.

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ *où* $x, y \in \mathbb{C}$. *Pour chaque nombre entier* $k \geq 0$*, on a* $(tA)^k = \begin{pmatrix} (tx)^k & 0 \\ 0 & (ty)^k \end{pmatrix}$*. Donc, on peut calculer* e^{tA} *comme*

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (tx)^k & 0 \\ 0 & (ty)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ty)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tx} & 0 \\ 0 & e^{ty} \end{pmatrix}.$$

b) Si $A^2 = A$ *alors* $(tA)^k = t^k A$ *pour tout nombre entier* $k \geq 1$*, donc*

$$e^{tA} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A = I + (e^t - 1)A.$$

Exercice 2. Montrer le lemme 6.3. du polycopié.

On considère le système suivant

$$\begin{array}{rcrcr} \mathrm{x}_1'(t) & = & a_{11}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{1n}\mathrm{x}_n(t) \\ \mathrm{x}_2'(t) & = & a_{21}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{2n}\mathrm{x}_n(t) \\ & \vdots & & & \\ \mathrm{x}_n'(t) & = & a_{n1}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{nn}\mathrm{x}_n(t) \end{array} \tag{1}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{X} = \{\mathrm{x}\colon \mathrm{x} \text{ est une solution du système (1)}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Solution. *Soient* $\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *avec* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *et* $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *la matrice de système* (1). *Car* $\mathbf{x} \in \mathscr{X}$, *on a* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$ *et le même pour* $\mathbf{y}$. *Donc,*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) + \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{y}(t) \\ &= A\mathbf{x}(t) + \alpha A\mathbf{y}(t) \\ &= A(\mathbf{x}(t) + \alpha\mathbf{y}(t)).\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{X}$ *est stable sous l'addition et la multiplication par un scalaire. Les autres propriétés découlent du fait que* $\mathscr{X}$ *est un sous-ensemble de l'espace des fonctions différentiables* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Solution. *Par définition, on a*

$$e^{tA} = I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= 0 + A + \frac{1}{2!}2tA^2 + \frac{1}{3!}3t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}nt^{n-1}A^n + \cdots \\ &= 0 + A + \frac{1}{1!}tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n + \cdots \\ &= A(I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots) \\ &= Ae^{At}.\end{aligned}$$

On peut aussi voir que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^j}{j!}) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{jt^{j-1}A^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j-1}A^j}{(j-1)!} = A\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^{j-1}A^{j-1}}{(j-1)!} = A\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^jA^j}{(j)!} = Ae^{At}.$$

Exercice 4. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^BP$.

Solution. *Par définition,*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k.$$

Or, comme $PP^{-1} = I$, *on a*

$$A^k = (P^{-1}BP)^k = \underbrace{P^{-1}BPP^{-1}BP\cdots P^{-1}BP}_{k\ fois} = P^{-1}B^kP,$$

donc

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}P^{-1}B^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B^k\right)P = P^{-1}e^BP$$

où on peut échanger l'ordre de la multiplication et de l'addition car la somme converge.

Exercice 5. Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$ si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ commutent. En déduire que $e^\bullet$ est une application de $\mathbb{C}^{n\times n}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Trouver deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Solution.

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!m!} A^k B^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m = e^A e^B.$$

Pour $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, on vérifie facilement que l'inverse de e^C est donné par la matrice e^{-C}.

Pour répondre à la dernière question de l'énoncé on prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on calcule

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Trouver la solution du système $x' = Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solution. *La solution du système est*

$$e^{tA}x(0)$$

Alors, il faut trouver e^{tA}. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On peut écrire

$$A = 2I_2 + N$$

Comme les deux matrices $2I_2$ et N commutent, on peut utiliser $e^A = e^{2I_2}e^N$. Maintenant, on voit que $N^2 = 0$ alors $e^{tN} = I + tN$ et on trouve que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

et la solution est donnée par

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Considérons l'équation différentielle de second ordre où $\lambda > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = \alpha \text{ et } u'(0) = \beta. \end{cases} \tag{2}$$

1. Reformuler le problème en une équation en dimension 2 de la forme $x' = Ax$ avec $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

2. Calculer e^{At} et en déduire la solution u du problème initial (2).

Formules : $\cos(x) = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ et $\sin(x) = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Solution. *1. On pose* $x(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$. *Alors, clairement,* $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. *De surcroît,* $x'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} x(t) = Ax(t)$, *où on définit* $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

2. On sait d'après le cours que l'unique solution du système est $x(t) = e^{tA}x(0)$. *Il s'agit donc de calculer* $e^{tA} = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k$, *et donc les puissances de la matrice* A.

Remarquons d'abord que $A^2 = -\lambda I$. *Par suite, on a*

$$A^{2k} = (-\lambda)^k I, \qquad A^{2k+1} = (-\lambda)^k A.$$

Ceci nous pousse à scinder la somme en indices pairs et impairs. Les indices pairs donnent

$$\sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(\sqrt{\lambda} t)^{2k}}{(2k)!} I = \cos(\sqrt{\lambda} t) I.$$

Parallèlement, les indices impairs donnent

$$\sum_{k\geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{(\sqrt{\lambda} t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} t A.$$

Par conséquent, on a

$$e^{tA} = \cos(\sqrt{\lambda} t) I + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} t A = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t & \cos(\sqrt{\lambda} t) \end{pmatrix}.$$

Finalement, les relations $x(t) = e^{tA}x(0)$ *et* $u = x_1$ *concluent :*

$$u(t) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda} t) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t).$$

On contrôlera que u *vérifie bien l'équation différentielle ainsi que les conditions initiales.*

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, et J sa forme normale de Jordan.

Montrer que les valeurs propres de e^J sont de la forme e^λ, où λ est une valeur propre de J. Montrer que les multiplicités algébriques de e^λ et λ sont égales et en déduire que

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

En déduire que l'application $e^\bullet$ de $\mathbb{R}^{n\times n}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective. Est-elle injective?

Solution. *Les polynômes caractéristiques de A et de J sont identiques, donc le nombre d'apparitions d'une valeur propre λ sur la diagonale de J est égal à sa multiplicité algébrique. Pour chaque bloc de Jordan B associé à une valeur propre λ, la matrice B^k est triangulaire supérieure avec λ^k sur sa diagonale. Par suite, l'exponentielle e^B est triangulaire supérieure avec e^λ sur sa diagonale.*

J est bloc-diagonale et son exponentielle est également bloc-diagonale avec pour blocs les exponentielles des blocs de J. Par conséquent, e^J est triangulaire supérieure avec e^λ sur sa diagonale.

Notons que le nombre de e^λ dans la diagonale de e^J est égal au nombre de λ dans la diagonale de J. C'est pourquoi la multiplicité algébrique de e^λ comme valeur propre de e^J est égale à cette de λ comme valeur propre de J.

La conclusion découle du fait que le déterminant est le produit des valeurs propres et la trace est la somme des valeurs propres:

$$\det(e^A) = \det(e^J) = \prod_\lambda e^\lambda = e^{\sum_\lambda \lambda} = e^{Tr(A)}.$$

Comme la fonction réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$ est strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$ on déduit du résultat précédent que $\det(e^A) > 0$ *lorsque $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ce qui montre que $e^\bullet$ n'est pas surjective.*

Pour la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient $e^B = I$ et comme on a aussi $e^0 = I$ on conclut que l'application $e^\bullet$ n'est pas injective.

Exercice 9. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que $A = -A^T$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$.

Montrer que la matrice e^A est orthogonale et que la matrice e^B appartient à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Solution. *On calcule*

$$e^A(e^A)^T = e^A e^{A^T} = e^{A+A^T} = I$$

où on a utilisé la commutativité des matrices A et A^T. Le calcul montre que e^A est une matrice orthogonale.

Par l'exercice précédent on sait que $\det(e^B) = e^{Tr(B)} = e^0 = 1$ *et on conclut que e^B appartient à $SL_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 10. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Trouver e^{tA} pour la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Utiliser ceci pour trouver la solution du système $x' = Bx$ où
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solution. *Le polynôme caractéristique de A est*
$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - a)^2 + b^2 = (\lambda - a - ib)(\lambda - a + ib),$$
ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = a - ib$ et $\lambda_2 = a + ib$, et $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres correspondants. Donc $P^{-1}AP = D$, où $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a - bi & 0 \\ 0 & a + bi \end{pmatrix}$, et on a
$$\begin{aligned} e^{tA} &= Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(a-ib)t} & 0 \\ 0 & e^{(a+ib)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{at}(e^{-ibt} + e^{ibt}) & \frac{i}{2}e^{at}(e^{-ibt} - e^{ibt}) \\ \frac{i}{2}e^{at}(-e^{-ibt} + e^{ibt}) & \frac{1}{2}e^{at}(e^{-ibt} + e^{ibt}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{at}\cos(bt) & e^{at}\sin(bt) \\ -e^{at}\sin(bt) & e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Maintenant, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, alors par la partie précédente, on a que
$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos(5t) & e^{2t}\sin(5t) \\ -e^{2t}\sin(5t) & e^{2t}\cos(5t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi la solution au système d'équations est
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(\cos(5t) + \sin(5t)) \\ e^{2t}(-\sin(5t) + \cos(5t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Pour les conditions initiales $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = -1$, on obtient
$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{2t}(2\cos(5t) - \sin(5t)) \\ x_2(t) &= e^{2t}(-\cos(5t) - 2\sin(5t)). \end{aligned}$$

Exercice 11. On considère un système différentiel $x' = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que, dans une solution $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}^T$ chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.

Solution. *On propose deux méthodes. La première consiste à dériver m fois. Comme* $\dot{x}(t) = Ax$*, on a* $\ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) = AAx(t) = A^2x(t)$*. Par récurrence, la dérivée k-ème, notée* $x^{(k)}(t)$*, satisfait* $x^{(k)}(t) = A^k x(t)$*. Par conséquent,* $x^{(m)}(t) = A^m x(t) = 0$*, et donc* $x_i^{(m)}(t) = 0$*, pour* $1 \leq i \leq n$*. Cela force* $x_i(t)$ *à être un polynôme de degré au plus* $m-1$*.*

L'autre méthode consiste à utiliser la résolution à l'aide de l'exponentielle. Comme $A^m = 0$*, on trouve*

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = I_2 + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}A^{m-1}.$$

Donc, si $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ *sont des constantes, la solution est*

$$x(t) = \exp(tA) \cdot c = c + tAc + \frac{1}{2}t^2A^2c + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}A^{m-1}c.$$

Cela implique clairement que chaque $x_i(t)$ *est un polynôme en* t *de degré au plus* $m-1$*.*

Exercice 12. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m est diagonalisable pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

Donner un contre-exemple lorsque A n'est pas inversible.

Solution.