**Ens. : Friedrich Eisenbrand**
**Algèbre Linéaire Avancée II - MA**
**29.06.2022**
**Durée : 180 minutes**

# n/a

n/a

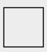
SCIPER : **999999**

**Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.**

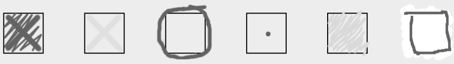


- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - $0$ point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - $-1$ point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

| choisir une réponse \| select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse \| NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse \| Correct an answer Antwort korrigieren |
|---|---|---|
|  |  |  |

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

**Remarque : Tout le long de l'examen, $K$ dénote un corps.**

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix}$. Un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ minimisant $\|Ax - b\|_2$ est

- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
- ☐ $x = (-\frac{8}{11}, 5)$
- ☐ $x = (-\frac{7}{22}, 6)$
- ☐ $x = (5, \frac{8}{11})$
- ☐ $x = (\frac{45}{7}, -\frac{4}{7})$

**Question 2** Trouver la solution du système suivant :

$$x_1' = 2x_1 + 6x_2$$
$$x_2' = -6x_1 + 2x_2$$

sujet aux conditions initiales $x_1(0) = 3$ et $x_2(0) = -4$.

- ☐ $x_1(t) = e^{3t}(2\cos(6t) - 4\sin(6t)), x_2(t) = e^{3t}(-4\cos(6t) - 2\sin(6t))$.
- ☐ $x_1(t) = e^{2t}(3\cos(6t) - 4\sin(6t)), x_2(t) = e^{2t}(-4\cos(6t) - 3\sin(6t))$.
- ☐ $x_1(t) = e^{4t}(6\cos(2t) - 4\sin(2t)), x_2(t) = e^{4t}(-4\cos(2t) - 6\sin(2t))$.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
- ☐ $x_1(t) = e^{2t}(5\cos(2t) - 4\sin(2t)), x_2(t) = e^{2t}(-4\cos(2t) - 5\sin(2t))$.

**Question 3** Quel est le polynôme caractéristique $\det(A - xI)$ de la matrice $A \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ☐ $x^5 + 8x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 8x + 8$
- ☐ $-x^5 + 6x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 8x + 8$
- ☐ $-x^5 + 8x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 8x + 10$
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Question 4** Soit $A \in K^{n\times n}$ une matrice, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de vecteurs propres de $A$, et $P = (v_1 \cdots v_n) \in K^{n\times n}$.
Alors

- ☐ $PAP^T$ est une matrice diagonale.
- ☐ $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
- ☐ $P^TAP$ est une matrice diagonale.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
- ☐ $PAP^{-1}$ est une matrice diagonale.

**Question 5** Soit $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ dont le polynôme caractéristique est $p_A(x) = -(x-1)^2(x-3)^3$. Les dimensions de l'image de $(A-\lambda I)$ sont 3 pour $\lambda = 1$, et 4 pour $\lambda = 3$. La forme normale de Jordan de $A$ est

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

**Question 6** Soit $f : \mathbb{Z}_2^5 \times \mathbb{Z}_2^5 \to \mathbb{Z}_2$ une forme bilinéaire définie par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et soit l'espace $W$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quelle est la dimension de $W^\perp$ ?

- ☐ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 3.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 7** Soient $V$ un espace euclidien, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble libre et $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ le résultat du procédé de Gram-Schmidt appliqué à $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. En plus, soit $\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ le résultat du procédé de Gram-Schmidt appliqué à $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots, v_n\}$ (les éléments $i$ et $i+1$ sont échangés). Alors $u_j = u'_j$ pour tout $j \neq \{i, i+1\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 8** La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \ldots & 3n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n^2-n+1) & (n^2-n+2) & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$ est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 9** Les valeurs propres d'une matrice $A \in K^{n \times n}$ nilpotente sont toutes nulles.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 10** Soit $A = PDQ$ une décomposition en valeurs singulières de $A$. Alors $Q^T D^T P^T$ est une décomposition en valeurs singulières de $A^T$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 11** Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible. Si toutes les valeurs propres de $A$ sont négatives, alors toutes les valeurs propres de $A^{-1}$ sont négatives.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 12** Pour chaque matrice $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $\{x \in \mathbb{Z}^n | Ax = 0\}$ admet un élément non nul si et seulement si $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ admet un élément non nul.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 13** Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que les $k$ premières valeurs singulières sont strictement positives. Alors il existe une *unique* solution au problème

$$\min_{\substack{B \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \mathrm{rang}(B) = k}} \|A - B\|_F.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 14** Soit $f : K^n \times K^n \to K$ une forme bilinéaire symétrique. Il existe une base de $K^n$ orthogonale par rapport à $f$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 15** Pour toute paire de matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on a $rang(AB) \geq rang(A) + rang(B) - n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 16** Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices symétriques dont les indices de positivité, négativité, nullité, sont les mêmes. Alors $A$ et $B$ sont congruentes.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 17** Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonalisable. Alors $A$ est hermitienne.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 18** Soit une forme bilinéaire symétrique $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie positive. Alors $f(x, y) \geq 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 19** La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ est en forme normale d'Hermite.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 20** Pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que $B$ est orthogonale, on a $\det(AB) = \det(A)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

**Question 21** Soit $N \in K^{n \times n}$ une matrice nilpotente non nulle. Il existe une base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de $K^n$ telle que $Nb_1 = b_2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

## Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 22:** *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices semblables sur $\mathbb{C}$.

(a) Montrer que $A$ et $B$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.
*Indice : partitionnez $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en $P = P_1 + iP_2$ où $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et considérez la fonction $x \mapsto det(P_1 + xP_2)$.*

(b) En déduire, à partir de l'unicité de la forme de Jordan (à permutation des blocs près), que deux matrices sont semblables sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'ils admettent la même forme normale de Jordan.

**Question 23:** *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

Soient $E, F$ deux corps tels que $F \subset E$.

(a) Montrer que $E$ est un espace vectoriel sur $F$ avec multiplication externe $e \cdot f$, $e \in E$, $f \in F$ étant la multiplication sur $E$ en vérifiant (1) Associativité, (2) Distibutivité et (3) Neutralité de $1_E = 1_F$. *Indice: Ici on teste la connaissance de la définition d'un espace vectoriel!*

(b) Maintenant soit $E$ vu comme espace vectoriel sur $F$ de dimension finie, et soit $e \in E$, $e \neq 0$. Montrer qu'il existe un polynôme $f(x) \in F[x]$, $f(x) \neq 0$ tel que $f(e) = 0$.

(c) Montrer qu'il y a un seul tel polynôme $p_e(x) \neq 0$ de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.

(d) Montrer que ce polynôme $p_e(x)$ est irréductible.

**Question 24:** *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

Soit $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ une matrice symétrique, unimodulaire, et définie positive. Montrer qu'il existe une matrice unimodulaire $U$ telle que $G = U^T U$.