Solutions Examen Algèbre Linéaire Avancée 2, 2021

30 mai 2023

Attention : Les solutions présentées sont très détaillées, les commentaires en petits caractères ne sont pas nécessaires dans vos solutions et servent à faciliter la compréhension si certaines étapes du raisonnement ne sont pas claires

Question 23

i) — À montrer : $\det(A) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_i}$
- Si on écrit $p_A(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$, $\alpha_i \in K$, alors

$$\alpha_0 = p_A(x) = \det(A - 0 \cdot I) = \det(A)$$

Par définition on a $p_A(x) = \det(A - xI)$ et donc une évaluation en $x = 0$ donne $\alpha_0 = \det(A - 0 \cdot I) = \det(A)$

- Par supposition : Pour tout i : $(x - \lambda_i)^{m_i} \mid p_A(x)$
- Factorisation en irréductibles uniques en $K[x] \implies \prod_{i=1}^{r}(x - \lambda_i)^{m_i} \mid p_A(x)$
- $n = \sum_i m_i = \sum_i \deg(x - \lambda_i)^{m_i} \implies p_A(x) = \alpha_n \prod_{i=1}^{r}(x - \lambda_i)^{m_i}$
- $\alpha_n = (-1)^n$

$\alpha_n = (-1)^n$: Discuté plusieurs fois en classe, par la formule de Leibniz on peut écrire $p_A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} q_\sigma(x)$ pour des polynômes $q_\sigma(x) = \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (A - xI)_{i,\sigma(i)}$

On remarque que le degré de $q_\sigma(x)$ est égal au nombre de points fixés par la permutation σ

Ainsi seulement la permutation $\sigma = id$ contribue au coefficient α_n de $p_A(x)$

Comme $q_{id}(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x)$ on obtient directement que $\alpha_n = (-1)^n$

- On a donc $\alpha_0 = p_A(0) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r}(0 - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m_i}$

4 points en total
on enlève 2 points si l'étudiant suppose que la matrice A et diagonalisable, on enlève 2 points si le signe est mal placé dans une des expressions, on enlève 1 point pour tout autre erreur

ii) — On veut montrer que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$

— Formule de Leibniz : $p_A(x) = \sum_{\sigma \in S_n} q_\sigma(x)$ où

$$q_\sigma(x) = \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (A - xI)_{i,\sigma(i)}$$

— Pour $\sigma \neq \mathrm{id}$, $\deg(q_\sigma(x)) \leq n - 2$

— Comme $q_{id}(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - x)$ on a

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}a_{11} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{nn} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$$

3 points en total
on enlève entre 0.5 et 1 points pour des erreurs dans la formule de Leibniz, on enlève entre 0.5 et 1 points si la restriction à la permutation $\sigma = id$ n'est pas justifée, si l'étudiant écrit simplement la formule de Leibniz avec la justification sur la restriction à $\sigma = id$ mais sans conclure l'étudiant obtient 2 points

iii) — On veut montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i$

Dans le point ii) on a montré que $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)$

— $p_A(x) = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n x^n = (-1)^n \prod_{i=1}^{r}(x - \lambda_i)^{m_i}$, alors :

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1} &= \underbrace{(-1)^{n+1}\lambda_1 + \ldots + (-1)^{n+1}\lambda_1}_{m_1 \text{fois}} + \ldots + \underbrace{(-1)^{n+1}\lambda_r + \ldots + (-1)^{n+1}\lambda_r}_{m_r \text{fois}} \\ &= (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{r} m_i\lambda_i\end{aligned}$$

— En utilisant le résultat du point ii) on conclut que $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i$

3 points en total
on enlève 2 points si l'étudiant suppose que A est diagonalisable, on enlève 1 point pour des erreurs de signe

Question 26

i) — Supposons $\rho(A) \geq 1$ et A^k converge vers la matrice 0

— Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geq 1$ valeur propre et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ vecteur propre associé à λ

— On passe par $x := x/\|x\|$, alors $\|x\| = 1$, où $\|\cdot\|$ dénote la norme associée aux produit Hermitien standard

— La suite $A^k x \in \mathbb{C}^n$ converge vers $0 \in \mathbb{C}^n$

Chaque composante de A^k est une suite convergeant vers 0 et chaque composante de $A^k x$ est une somme finie de suites convergeant vers 0

— Mais $\|A^k x\| = \|\lambda^k x\| = |\lambda|^k \|x\| \geq 1$

— Contradiction !

3 points en total
1 point pour l'idée et le début de la preuve par contradiction, 1 point pour le calcul $\|A^k x\| = \|\lambda^k x\| = |\lambda|^k \|x\| \geq 1$ et 1 point pour conclure l'argument

ii) — On veut montrer que si $|\lambda| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$

Comme N est nilpotente il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$, en plus comme λI est une matrice scalaire elle commute avec la matrice N,

— On applique la formule du binôme de Newton, on suppose $n > k$ et on calcule

$$\begin{aligned}
B^n &= (\lambda I + N)^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} I \cdot N^i \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} I \cdot N^i + \underbrace{\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} I \cdot N^i}_{=0} \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} I \cdot N^i
\end{aligned}$$

Un résultat d'Analyse nous donne que

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} = 0$$

pour $i \in \{0, \dots, k-1\}$ fixé et $|\lambda| < 1$

On donc montré que B^n est égal à une somme finie dont chaque terme converge vers 0 quand $n \to \infty$

— On obtient $\lim_{n\to\infty} B^n = 0$

4 points en total
1 point pour l'utilisation de la formule du binôme de Newton, 2 points pour simplifier l'expression correctement à l'aide de la nilpotence de N et 1 point pour conclure l'argument à l'aide de la limite $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{i} \lambda^{n-i}$

iii) On montre les deux direction du si et seulement si

$\Longrightarrow$ — Contraposée : si $\rho(A) \geq 1$ alors la suite A^n ne converge pas vers la matrice 0

— Conclusion par le point a) de l'exercice

$\Longleftarrow$ — Supposons $\rho(A) < 1$ et utilisons la forme normale de Jordan $A = P^{-1}JP$

— On voit que $A^n = P^{-1}J^nP$ et chaque bloc de la forme normale de Jordan converge vers la matrice 0 par le point b) de l'exercice

Car on a $|\lambda| < 1$ pour tous les blocs

— Ainsi la suite A^n converge vers 0

3 points en total
1 point pour la direction $\Longrightarrow$ de l'équivalence et 2 points pour l'autre direction (1 point pour l'utilisation de la forme normale de Jordan et 1 point pour conlure à l'aide du point b))

Question 27

i) — On veut montrer que $||v - l|| \leq ||v||$
— Comme on a $\langle v - l, l\rangle = 0$ car $l \in H$, on applique le théorème de Pythagore dans le calcul suivant

$$||v||^2 = ||v - l + l||^2 = ||v - l||^2 + ||l||^2$$

— Ainsi $||v||^2 \geq ||v - l||^2$ et donc $||v|| \geq ||v - l||$

3 points en total
on donne 0 points si $\langle v, l\rangle \geq 0$ est utilisé sans justification, on donne 0 points pour $||v - l||^2 = \langle v, v\rangle - \langle v, l\rangle$, on enlève 1 point si par exemple l'application de Pythagore n'est pas justifiée

ii) — On veut montrer que $\det(A^T A) = \prod_{i=1}^n ||a_i^*||^2$
Où a_i^* est la i-ème colonne de la matrice A^*
— Il est clair que $\det(R) = 1$
Car R est une matrice triangulaire supérieure avec que de 1 sur la diagonale
— On calcule

$$\begin{aligned}\det(A^T A) &= \det((A^* R)^T (A^* R)) \\ &= \det(R^T A^{*T} A^* R) \\ &= \underbrace{\det(R^T)}_{=1} \underbrace{\det(R)}_{=1} \det(A^{*T} A^*) \\ &= \det(A^{*T} A^*)\end{aligned}$$

— Par définition du produit matriciel on voit que

$$(A^{*T} A^*)_{ij} = a_i^{*T} a_j^* = \begin{cases} ||a_i^*||^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On sait que les colonnes de A^* sont deux-à-deux orthogonaux
— On obtient $A^{*T} A^* = \mathrm{diag}(||a_1^*||^2, \dots, ||a_n^*||^2)$ et $\det(A^{*T} A^*) = \prod_{i=1}^n ||a_i^*||^2$
— Par le calcul qui précède on obtient $\det(A^T A) = \prod_{i=1}^n ||a_i^*||^2$

4 points en total
on donne 2 points pour montrer $\det(A^T A) = \det(A^{*T} A^*)$ et 2 points pour la preuve de $\det(A^{*T} A^*) = \prod_{i=1}^n ||a_i^*||^2$

iii) — On veut montrer que $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|$

Où a_i est la i-ième colonne de la matrice A

— On a $\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2$

On obtient donc $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} \|a_i^*\|$ par la partie ii)

Comme on a utilisé la méthode de Gram-Schmidt pour définir A^* on a la relation $a_i^* = a_i - l$ où $l \in \mathrm{span}\{a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*\}$, en plus on a aussi $a_i^* \perp \mathrm{span}\{a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*\}$

— Posons $H = \mathrm{span}\{a_1^*, \ldots, a_{i-1}^*\}$ et on conclut par le point i) que $\|a_i^*\| = \|a_i - l\| \leq \|a_i\|$

— On en déduit que

$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} \|a_i^*\| \leq \prod_{i=1}^{n} \|a_i\|$$

3 points en total

on donne 1 point pour montrer $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} \|a_i^*\|$ et 2 points pour $\|a_i^*\| \leq \|a_i\|$ en utilisant i) et après avoir verifié les conditions