Solutions Examen Algèbre Linéaire Avancée 2, 2022

Attention : Les solutions présentées sont très détaillées, les commentaires en petits caractères ne sont pas nécessaires dans vos solutions et servent à faciliter la compréhension si certaines étapes du raisonnement ne sont pas claires

Question 22

a) — On veut montrer que les matrices A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$

— Il existe une matrice $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible tel que

$$A = PBP^{-1} \iff AP = PB \tag{1}$$

Car A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$

— On écrit $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Cela est possible car chaque élément de la matrice s'écrit comme $(P)_{ij} = p_{ij} + i\tilde{p}_{ij}$ avec $p_{ij}, \tilde{p}_{ij} \in \mathbb{R}$ et on peut donc rassembler les p_{ij} dans la matrice P_1 et les $\tilde{p}_{ij}$ dans la matrice P_2

— L'équation (1) donne les deux équations $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$ (2 points pour ces relations)

— On considère la fonction $f(x) := \det(P_1 + xP_2)$, comme f est définie par un déterminant on sait du cours Algèbre Linéaire Avancée 1 que f est un polynôme réel de degré au plus n

On peut voir f aussi comme un polynôme complexe et comme P est une matrice inversible on sait que $f(i) \neq 0$

— f n'est pas le polynôme identiquement nul sur $\mathbb{C}$ et par conséquent f n'est pas le polynôme identiquement nul sur $\mathbb{R}$ (2 points pour remarquer que f est un polynôme non identiquement nul)

— Il existe un élément $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \neq 0$ car f possède au plus n racines réelles distinctes

$\mathbb{R}$ possède une infinité d'éléments

— Posons $Q := P_1 + yP_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, alors Q est inversible et on obtient

$$AQ = AP_1 + yAP_2 = P_1B + yP_2B = QB$$

(2 points pour montrer l'existence de y et terminer l'argument)

b) On montre les deux direction du si et seulement si

$\Longrightarrow$ — Quand deux matrices réelles A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ alors A est semblable à sa forme normale de Jordan mais aussi à la forme normale de Jordan de la matrice B

Car «être semblable»est une relation d'équivalence, on utilise la transitivité

— A est semblable à deux formes normales de Jordan

— Par l'unicité on obtient que A et B admettent la même forme normale de Jordan (2 points pour cette direction de l'équivalence)

$\Longleftarrow$ — Quand A et B admettent la même forme normale de Jordan alors les deux matrices sont semblable sur $\mathbb{C}$

On utilise la transitivité

— Le point a) donne que A et B sont aussi semblable sur $\mathbb{R}$ (2 points pour cette direction de l'équivalence)

dans la correction on enlève un point dans la direction $\Longleftarrow$ de b) si l'étudiant affirme que la matrice de la forme normale de Jordan et les matrices de changement de base sont forcément réelles

Question 23

a) — On veut montrer que E est un espace vectoriel sur F en vérifiant l'associativité, la distributivité et la neutralité de $1_E = 1_F$

— Prenons des éléments $x, y \in F$ et $z, w \in E$

Associativité :

$$x \cdot (y \cdot z) = x \cdot (yz) = x(yz) = (xy)z = (xy) \cdot z$$

Où on a utilisé l'associativité de la multiplication sur E

Distributivité :

$$x \cdot (z + w) = x(z + w) = xz + xw = x \cdot z + x \cdot w$$

et

$$(x + y) \cdot z = (x + y)z = xz + yz = x \cdot z + y \cdot z$$

Où on a utilisé la distributivité sur E

Neutralité :

$$1_E \cdot z = 1_F z = z$$

1 point par propriété, attention pour la distributivité il faut vérifier les deux égalités

b) — E est un espace vectoriel de dimension finie sur F

— Prenons $e \in E \backslash \{0\}$, on veut montrer qu'il existe un polynôme $f(x) \in F[x]$ tel que $f(x) \neq 0$ et $f(e) = 0$

— Soit n la dimension de E sur F, alors $1, e, e^2, \ldots, e^{n+1}$ sont $n + 1$ éléments de E

— Il existe une combinaison linéaire non-triviale de ces éléments avec des coefficients dans F qui est égal à zéro

$$\sum_{i=0}^{n} f_i e^i = 0$$

avec $f_i \in F \; \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

— Le polynôme à définir est $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$

3 points, il s'agit d'une question difficile où on donne dans pour la plupart des solutions soit 0 points soit 3

c) — On suppose l'existence de deux polynômes $g(x), h(x) \in F[x]$ qui satisfont les conditions

— Considérons le polynôme $g - h$ qui est de degré strictement inférieur au degré de g et de h et qui s'annule en e (1 point pour l'idée de considérer la différence)

— Par la minimalité des polynômes g et h on obtient que $g - h$ doit être le polynôme identiquement nul et on a donc $g = h$ (1 point pour la conclusion à l'aide de la minimalité)

d) — On suppose que $p_e(x) \in F[x]$ est un polynôme réductible

— Ainsi $p_e = g \cdot h$ avec $g(x), h(x) \in F[x]$ des polynômes non-constantes (1 point pour appliquer la définition d'irréductible/réductible)

— $g(e) = 0$ ou $h(e) = 0$

Car un corps est intègre

— Comme $\deg(g), \deg(h) < \deg(p_e)$ on a une contradiction avec la minimalité de p_e (1 point pour la conclusion à l'aide de la minimalité)

On a donc montré que p_e est irréductible sur F

Attention le choix $f(x) = x - e$ n'est pas correcte pour la question b) car il ne s'agit pas d'un polynôme avec coefficients dans F

Question 24

— On veut montrer qu'il existe une matrice unimodulaire U telle que $G = UU^T$

— Idée : appliquer des opérations unimodulaires sur les lignes et les colonnes de G pour arriver à la matrice identité (1 point pour cette idée)

— Pour $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ unimodulaire, la matrice $U^T G U$ reste symétrique, unimodulaire et définie positive (1 point pour remarquer ces propriétés)

— Comme la matrice G est définie positive on a que $a, c \geq 0$ (1 point pour cette implication)

À une permutation des deux lignes près on peut supposer qu'on est dans le cas $a \leq c$

— Quand $|b| < a$ on a

$$1 = \det(G) = ac - b^2 \leq (|b|+1)^2 - b^2 = 2|b| + 1$$

Ceci implique $b = 0$ et $a = c = 1$, c'est-à-dire $G = I$ (2 points pour le cas $|b| < a$)

— Le cas $|b| \geq a$

Il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $b = \lambda a + b'$ avec $|b'| < a$

Division euclidienne dans l'anneau euclidien $\mathbb{Z}$ de b par a

Pour $U = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on calcule

$$U^T G U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - \lambda a \\ b - \lambda a & c - 2\lambda b + \lambda^2 a \end{pmatrix}$$

Notons cette dernière matrice $\begin{pmatrix} a & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$

On est dans le cas $|b'| < a$ mais on ne peut pas conclure immédiatement car le coefficient c' a changé

On sait que $|b'| < |b|$ et on peut donc une nouvelle fois permuter a et c' pour avoir $a \leq c'$

En répétant ce processus on obtient une suite strictement décroissante de nombres entiers positifs $|b| > |b'| > |b''| > \ldots$ qui se termine

Par la méthode de descente infinie (4 points pour le cas $|b| \leq a$)

— La condition $|b| < a$ doit être vrai après au plus $|b|$ étapes et on obtient la matrice identité à cette étape

— Avec toutes les matrices unimodulaire $U_1, \ldots, U_N$ utilisées pour arriver à cette étape on obtient

$$U_N^T \cdots U_1^T G U_1 \cdots U_N = (U_1 \cdots U_N)^T G (U_1 \cdots U_N) = I$$

en plus on a donné 1 point pour mentionner ou appliquer clairement le fait que le produit de matrices unimodulaires reste unimodulaire

on enlève des points si

— l'étudiant suppose $b > 0$

— l'étudiant termine le processus avec $b = 0$ sans explication supplémentaire

— l'étudiant fait des erreurs de calcul notamment au niveau des matrices