**Algèbre linéaire avancée II**
printemps 2024

**Série 12 – Corrigé**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1.** (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Posons le *polynôme minimal de $A$* le polynôme de degré minimal de $\mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ unitaire et qui annule $A$.

1. Montrer qu'il existe et qu'il est bien unique.
2. Montrer qu'il divise tout polynôme annulant $A$ et donc, en particulier, le polynôme caractéristique de $A$.

**Solution.** *1. Le théorème de Cayley-Hamilton implique que $p_A(A) = 0$ et donc que le polynôme minimal existe. Soient deux polynômes minimaux $p$ et $q$ de $A$. En particulier, ils sont unitaires, de même degré, et annulent $A$. Dès lors, $p - q$ est de degré strictement inférieur et annule également $A$. Il doit donc être le polyôme nul, et donc $p = q$, ce qui montre l'unicité.*

*2. Soit $m_A$ le polynôme minimal de $A$ et $f$ un polynôme quelconque annulant $A$. La division euclidienne de $f$ par $m_A$ donne*

$$f = m_A q + r,$$

*où $\deg(r) < \deg(m_A)$. Or, en évaluant en $A$, on trouve $r(A) = 0$, et donc que $r$ doit être le polynôme nul, par minimalité de $m_A$.*

**Exercice 2.** Soit $T : \mathbb{C}^{12} \to \mathbb{C}^{12}$ un endormorphisme admettant pour polynômes caractéristique et minimal

$$p_T(x) = (x-6)^4(x+3)^6x^2, \qquad m_T(x) = (x-6)^2(x+3)^3x.$$

Montrer qu'il n'existe que 6 tels endormorphismes à conjugaison par isomorphisme près ($\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ sont considérés comme la même application pour $\phi$ un automorphisme de $\mathbb{C}^{12}$).

**Solution.** *Il s'agit ici de compter le nombre de formes normales de Jordan possibles, sans compter les permutations entre blocs.*

*Les blocs associés à la valeur* $6$ *vérifient que : la somme de leurs tailles est* $4$ *et le plus gros bloc est de taille* $2$*. Les deux seules possibilités pour les tailles des blocs sont donc* $4 = 2 + 2$ *et* $4 = 2 + 1 + 1$*.*

*Similairement, les trois possibilités pour* $3$ *sont :* $6 = 3+1+1+1$, $6 = 3+2+1$, *et* $6 = 3 + 3$.

*Il n'y a qu'une possibilité d'agencement des blocs associés à* $0$ $(2 = 1 + 1)$*, et donc le nombre de formes normales de Jordan différentes est* $2 \times 3 \times 1 = 6$*.*

**Exercice 3.** Calculer les polynômes caractéristique et minimal de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $1, 2, -3$. En déduire sa forme normale de Jordan.

**Solution.** *En développant par la dernière colonne, le polynôme caractéristique* $p_A$ *de* $A$ *est*

$$p_A(\lambda) = \lambda^8 + 2\lambda^7 - 17\lambda^6 - 16\lambda^5 + 115\lambda^4 - 22\lambda^3 - 279\lambda^2 + 324\lambda - 108.$$

*Des divisions successives par* $\lambda - 1$ *donnent le produit* $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda^5 + 5\lambda^4 - 5\lambda^3 - 45\lambda^2 + 108)$*, et de nouvelles divisions par* $\lambda + 3$ *et* $\lambda - 2$ *donnent* $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+3)^3(\lambda-2)^2$*. Par conséquent, les valeurs* $1, 2,$ *et* $-3$ *ont pour multiplicité algébrique* $3, 2$ *et* $3$ *respectivement.*

*Pour connaître la décomposition de Jordan et le polynôme minimal, il s'agit d'abord de calculer la multiplicité géométrique de chaque valeur. Or on remarque immédiatement que* $rang(A - \lambda I) = 7$ *pour* $\lambda = 1, 2, -3$*, et donc que les multiplicités géométriques sont toutes 1. La forme de Jordan est donc composée de trois blocs diagonaux, chacun associé à une des valeurs propres. De plus, le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique.*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ un bloc de Jordan avec $\lambda$ sur la diagonale. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Montrer que

$$(e^{tA}x)_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t}.$$

**Solution.** *On peut écrire $A = D + N$ où $D$ est diagonale et $N$ est nilpotente. Comme $D$ et $N$ commutent, on a que $e^{At} = e^{Dt}e^{Nt}$. Il est facile de voir que $e^{Dt} = e^{\lambda t}I$. Pout trouver $e^{Nt}$, on observe que*

$$N_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i+1 = j \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

*donc on obtient que*

$$(N^k)_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i+k = j \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

*Dès lors,*

$$e^{Nt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & 1 & t \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*c'est-à-dire que*

$$\left(e^{Nt}\right)_{ij} = \begin{cases} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} & si\ j \geq i \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

*Finalement, on obtient que $e^{At}x = e^{Dt}e^{Nt}x = e^{\lambda t}e^{Nt}x$, donc*

$$\left(e^{At}x\right)_i = e^{\lambda t} \sum_{j=1}^{n} \left(e^{Nt}\right)_{ij} x_j = e^{\lambda t} \sum_{j=i}^{n} \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!}.$$

**Exercice 5.** Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application telle que $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

*a)* Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $Q(x) = x^T Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

*b)* Soit $B$ la base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, telle que $Q(x) = [x]_{B'}^T D[x]_{B'}$ où $D$ est une matrice diagonale.

**Solution.** *a) Le matrice $A$ que l'on cherche est*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

*b)* *On commence par calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$. Le polynôme charactéristique de $A$ est*

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= (9-\lambda)(7-\lambda)(11-\lambda)-16(11-\lambda)-16(7-\lambda)\\ &= -\lambda^3+27\lambda^2-207\lambda+405\\ &= -(\lambda-15)(\lambda-9)(\lambda-3)\end{aligned}$$

*ainsi les valeurs propres de $A$ sont $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 9$ et $\lambda_3 = 3$. Le premier vecteur propre satisfait $(A-\lambda_1 I)v_1 = 0$. On trouve $v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et de la même façon on obtient $v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$. La matrice $P_{B'B}$ qui satisfait $[x]_B = P_{B'B}[x]_{B'}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ est ainsi la matrice avec les colonnes $v_1, v_2$ et $v_3$:*

$$P_{B'B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\-1 & -2 & 2\\2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

*Maintenant, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^3$*

$$\begin{aligned}Q(x) &= [x]_B^T A[x]_B\\ &= (P_{B'B}[x]_{B'})^T A(P_{B'B}[x]_{B'})\\ &= [x]_{B'}P_{B'B}^T A P_{B'B}[x]_{B'}\\ &= [x]_{B'}D[x]_{B'}.\end{aligned}$$

*où*

$$D = (P_{B'B})^T A P_{B'B} = \begin{pmatrix}15 & 0 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

*est une matrice diagonale.*

**Exercice 6.** Soit $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ dont le polynôme caractéristique est $p_A(x) = -(x-1)^2(x-3)^3$. Les dimensions de l'image de $(A-\lambda I)$ sont 3 pour $\lambda = 1$ et 4 pour $\lambda = 3$. La forme normale de Jordan de la matrice $A$ est

☐ $\begin{pmatrix}1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1\\ & & & & 3\end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1\\ & & & & 3\end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix}1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1\\ & & & & 3\end{pmatrix}$

☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Solution.** *Aucune des autres réponses n'est correcte.*

**Exercice 7.** Soit $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ une matrice avec polynôme caractéristique

$$p_A(x) = (x-1)^5(x+1)^2(x-2)$$

et polynôme minimal

$$m_A(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2).$$

Soit $J$ la forme normale de Jordan de la matrice $A$. Alors

- ☐ $J$ a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.
- ☐ $J$ a au plus 6 blocs de Jordan.
- ☐ $J$ a un seul bloc de Jordan pour la valeur propre -1.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Solution.** *$J$ a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.*

**Exercice 8.** Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A^3 = A$. Alors on a que

- ☐ $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} - A^2$.
- ☐ $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!}$.
- ☐ $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} + A^2$.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Solution.** $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} - A^2$.

**Exercice 9.** Cet exercice propose un exemple du théorème 7.9. du polycopié.
Soit $V$ un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et $N : V \to V$ une application nilpotente. Soient $v_1, v_2, v_3 \in V$ et supposons que l'ensemble

$$v_1, Nv_1, N^2v_1, v_2, Nv_2, v_3, Nv_3, N^2v_3, N^3v_3$$

engendre l'espace $V$ (les durées de vie des vecteurs $v_1, v_2, v_3$ sont $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ et $m_3 = 4$).
On a une combinasion linéaire non-triviale

$$3v_1 + 2Nv_1 + N^2v_1 + v_2 + 2Nv_2 + \mu v_3 + Nv_3 + 2N^2v_3 + 8N^3v_3 = 0.$$

Quelle est la valeur de $\mu$? Par quel vecteur pourrions-nous remplacer $v_1$ selon l'algorithme de la preuve du théorème 7.9.?

**Solution.** *On a forcément $\mu = 0$ et l'algorithme dans la preuve du théorème 7.9. propose de remplacer $v_1$ par $3v_1 + Nv_3$ car on a $N^2(3v_1 + Nv_3) = 3N^2v_1 + N^3v_3 = 0$.*

**Exercice 10.** Trouver toutes les solutions entières de

$$Ax = b_1, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

et de

$$Bx = b_2, \text{ où } B = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -10 \\ -6 & 15 & 12 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

**Solution.** *On va trouver la forme normale de Hermite des matrices $A$ et $B$ afin de résoudre ces systèmes.*

*On a que la forme normale de Hermite de $A$ est*

$$H_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*avec matrice de passage unimodulaire*

$$U_A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 23 \end{pmatrix}.$$

*Ainsi, on sait que $AU_A = H_A$.*

*On trouve d'abord les solutions de $H_A y = b_1$ qui sont*

$$Y_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

*On a donc que les solutions entières de (1) sont*

$$\{U_A y \mid y \in Y_A\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

*De la même manière on a que la forme normale de Hermite de $B$ est*

$$H_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

*avec matrice de passage unimodulaire*

$$U_B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 13 \end{pmatrix}.$$

*Ainsi, on sait que $BU_B = H_B$.*

*On trouve d'abord les solutions de $H_B y = b_2$ qui sont*

$$Y_B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

*On a donc que les solutions entières de* (2) *sont*

$$\{U_B y \mid y \in Y_B\} = \left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Exercice 11.** (*) En utilisant la forme normale de Jordan montrer que toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est semblable à sa transposée $A^T$.

**Solution.**