Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 13

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ une matrice de rang ligne plein et $n > m$. Montrer qu'il existe $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}^n$ linéairements indépendants sur $\mathbb{R}$ tels que

$$\ker_{\mathbb{Z}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i b_i \mid x_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Le noyau $\ker_{\mathbb{Z}}$ est défini par $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax = 0\}$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ et $d \in \mathbb{Z}$ un nombre entier qui divise chaque composante de A. Montrer que si $U \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ et $V \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ sont des matrices unimodulaires, alors d divise chaque composante de UAV.

Exercice 3. Calculer la forme normale de Smith pour

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 21 & 0 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 15 & 0 & 10 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ et $\operatorname{rang}(A) = m$. L'ensemble $\Lambda(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{Z}^n\}$ est un réseau entier généré par A. Parmi les matrices suivantes, lesquelles génèrent le même réseau?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ une matrice unimodulaire.

i) Montrer que U^{-1} est aussi unimodulaire.

ii) Montrer que $\mathbb{Z}^n = \{Uz \mid z \in \mathbb{Z}^n\}$, c'est-à-dire que U est un automorphisme de $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 6. Soit $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ une matrice unimodulaire. Montrer qu'il existe un $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ et des matrices E_i pour $i \in \{1,\dots,m\}$ tels que

i) chaque E_i représente une opération élémentaire unimodulaire (cf. définition 8.4.),

ii) on a $U = E_1 \cdot E_2 \cdots E_m$.

Exercice 7. Montrer que le système $Ax = 0$ a une solution $0 \neq z^\star \in \mathbb{Z}^n$ pour chaque matrice $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ avec $m < n$.

Exercice 8. Montrer que d dans le lemme 8.6. est le gcd de la première ligne de A. En d'autres mots, montrer le lemme suivant:

Soit $A \in Z^{m\times n}$ une matrice de plein rang ligne, alors il existe une matrice unimodulaire $U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, tel que la première ligne de AU est de la forme $(d, 0, \dots, 0)$ où $d = \gcd(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n})$.

Exercice 9. (*) Soit $G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ une matrice symétrique, unimodulaire et définie positive. Montrer qu'il existe une matrice unimodulaire U telle que $G = U^\intercal U$.