Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 14 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Soit $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ telle que $B = (b_1, \dots, b_n)$ et $\det(B) \neq 0$. Posons $\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n \|b_i\|}{\det(B)}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tel que $v = Bx$ est un vecteur le plus court de $\operatorname{Im}_{\mathbb{Z}}(B) = B \cdot \mathbb{Z}^n$. Montrer alors que $\|x\|_\infty \leq \alpha$.

Indice : la règle de Cramer stipule que la solution du système $Bx = v$ vérifie $x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)}$, où B_i est la matrice carrée formée en remplaçant la i-ième colonne de B par v.

Solution. *L'inégalité de Hadamard permet de conclure :* $|x_i| \leq \frac{1}{\det(B)} \|v\| \prod_{j \neq i} \|b_j\|$. *Comme* v *est supposé court, on a forcément* $\|v\| \leq \|Be_i\| = \|b_i\|$*, et le résultat suit.*

Exercice 2. Soit $V = \mathbb{F}_3^3$ muni de la forme bilinéaire standard. Soit $W = \operatorname{span}\{(1,1,1)^T\}$.

i) Montrer que $W \subseteq W^\perp$.

ii) Montrer qu'il existe $0 \neq u \in V \setminus (W + W^\perp)$.

Cela montre que pour une forme bilinéaire non-dégénérée, on a pas nécessairement $W \oplus W^\perp = V$.

Solution. *i)* $W = \{(0,0,0)^T, (1,1,1)^T, (2,2,2)^T\}$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = 3ab \equiv 0 \mod 3,$$

alors $\langle w, w' \rangle = 0$ *pour tout* $w, w' \in W$, $W \subseteq W^\perp$.

ii) Observons que

$$W^\perp = \left\{ v \in \mathbb{F}_3^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \mod 3 \right\},$$

car $\langle (a,a,a)^T, (v_1,v_2,v_3)^T \rangle = a(v_1 + v_2 + v_3)$ *et donc* $v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0 \mod 3$ *pour* $a \neq 0$. *Ainsi* $(1,1,0)^T \notin W^\perp = W + W^\perp$ *d'après la partie i).*

Exercice 3. Considérons la suite de Fibonacci $\{F_n\}_{n\geq 0}$ définie récursivement par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

Soit $X_n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 0$.

1. Trouver la matrice $A \in \mathbb{R}^2$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser $A = PDP^{-1}$ en explicitant P et D.
3. En déduire de la relation $X_n = A^n X_0$ une expression fonctionnelle pour F_n en fonction de n.

Solution. *1. On trouve* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pour diagonaliser A on calcule le polynôme caractéristique p_A.

$$p_A(\lambda) = (-1)^2\lambda^2 + (-1)^1 \operatorname{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Ses racines sont $\phi_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or et son conjugué. Des vecteurs propres associés sont par exemple $v_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_\pm \end{pmatrix}$.

On a alors $P = \begin{pmatrix} v_+ & v_- \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{pmatrix}$ qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

3. Par conséquent, $X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On ne s'intéresse donc qu'à la première coordonnée de la deuxième colonne de PD^nP^{-1}. Ceci donne

$$F_n = \frac{\phi_+^n - \phi_-^n}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 4. Soient m points (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$ dans $\mathbb{R}^2$. Cherchons le meilleur polynôme de degré d approximant ces points ($d < m$).

$$f^* = \arg \min_{\deg(f)\leq d} \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - y_i|^2.$$

1. Rappeler la forme de la matrice de Vandermonde $V \in \mathbb{R}^{m\times(d+1)}$ associée aux valeurs $x_1, \dots, x_m$.
2. Réécrire le problème en un problème des moindres carrés du type

$$x^* = \arg \min_{x\in\mathbb{R}^{d+1}} ||Vx - y||_2^2.$$

3. Trouver la meilleur droite approximant les points $(0,0),(1,-1),(2,3)$, et $(-1,1)$.

Solution. *1. Posons* $V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^d \end{pmatrix}$.

2. Si $f(x) = \alpha_0 + \cdots + \alpha_d x^d$, *on ait*

$$f(x_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & \dots & x_i^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix},$$

pour chaque $i = 1, \dots, m$.

Par suite, nous avous posé V *de telle sorte que le vecteur* $V\alpha - y$ *admet pour coordonnées* $f(x_i) - y_i, i = 1, \dots, m$, *et*

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - y_i|^2 = \|V\alpha - y\|_2^2 .$$

Résoudre le problème initial pour f *revient donc à résoudre le problème des moindres carrés ci-dessus pour les coefficients* $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$ *de* f.

3. Dans ce cas, la matrice V *et le vecteur* y *prennent la forme*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On résoud le système par exemple en résolvant $V^T V\alpha = V^T y$, *qui est équivalent à*

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on obtient $\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *et donc* $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Exercice 5. Soit A une matrice hermitienne. Montrer que la décomposition du théorème spectral $A = PDP^*$, où P est unitaire, implique que

$$A = \sum_{\lambda} \lambda P_\lambda,$$

où P_λ est la projection sur l'espace propre E_λ et la somme est prise sur toutes les valeurs propres distinctes de A.

Solution. *On se rappelle que les colonnes de P sont des vecteurs propres de A : $P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$.*

Dès lors, la décomposition $A = PDP^*$ s'exprime de la façon suivante.

$$A = P = \begin{pmatrix} p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^* \\ \vdots \\ p_n^* \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i p_i^*.$$

Posons désormais λ une valeurs propre de A et $p_1, \dots, p_k$ les vecteurs propres orthonormaux associés.

Ces vecteurs forment une base orthonormale de l'espace propre E_λ. Comme vu en cours, la projection orthogonale d'un vecteur quelconque v sur E_λ est

$$P_\lambda(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, p_i \rangle \, p_i,$$

où $\langle u, v \rangle = u^T \bar{v}$ est le produit hermitien usuel. Attention donc à l'ordre de v et p_i dans l'expression ci-dessus, car le produit scalaire est hermitien, et non symétrique ici.

Par suite, comme $\langle v, p_i \rangle = \overline{\langle p_i, v \rangle} = p_i^* v$, on obtient

$$P_\lambda(v) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i p_i^* \right) v,$$

ce qui permet de conclure que $P_\lambda = \sum_{p_i \text{ associé à } \lambda} p_i p_i^*$, et que $A = \sum_{\lambda \text{ distincts}} \lambda P_\lambda$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Le rayon spectral ρ est défini comme $\rho = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ valeur propre de } A\}$. On considère la suite A^k pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer les assertions suivantes :

1. Si $\rho \geq 1$, alors A^k ne converge pas vers la matrice 0.
2. Soit $B = \lambda I + N$, où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est une matrice nilpotente. Si $|\lambda| < 1$, alors $\lim_{k \to \infty} B^k = 0$.
3. La suite A^k converge vers la matrice 0 si et seulement si $\rho < 1$.

Solution.

1. *Supposons par contradiction que $\rho(A) \geq 1$ et A^k converge vers la matrice 0. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A telle que $|\lambda| \geq 1$ et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de norme 1 associé à λ.*

   La suite $A^k x \in \mathbb{C}^n$ converge vers $0 \in \mathbb{C}^n$. Mais $\|A^k x\| = \|\lambda^k x\| = |\lambda|^k \|x\| \geq 1$, ce qui est une contradiction.

2. *On veut montrer que si $|\lambda| < 1$ alors $\lim_{k \to \infty} B^k = 0$. Comme N est nilpotente il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $N^m = 0$, en plus comme λI est une matrice scalaire elle commute avec la matrice N.*

On applique la formule du binôme de Newton, on suppose $k > m$ et on calcule

$$\begin{aligned} B^k &= (\lambda I + N)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} I \cdot N^i \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} I \cdot N^i + \underbrace{\sum_{i=m}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} I \cdot N^i}_{=0} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} I \cdot N^i \end{aligned}$$

Un résultat d'Analyse nous donne que

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} = 0$$

pour $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ fixé et $|\lambda| < 1$.

On donc montré que B^n est égal à une somme finie dont chaque terme converge vers 0 quand $k \to \infty$. On obtient $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$.

3. $\Rightarrow$: *Par contraposée, si $\rho(A) \geq 1$ alors la suite A^n ne converge pas vers la matrice 0 par le point i) de l'exercice.*

   $\Leftarrow$: *Supposons $\rho(A) < 1$ et utilisons la forme normale de Jordan $A = P^{-1}JP$. On voit que $A^n = P^{-1}J^nP$ et chaque bloc de la forme normale de Jordan converge vers la matrice 0 par le point ii) de l'exercice. Ainsi la suite A^n converge vers 0.*

Exercice 7. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et G un groupe d'automorphismes linéaires de V. Supposons que les seuls sous-espaces G-invariants sont V et $\{0\}$.
Montrer qu'un endomorphisme non-nul $f : V \to V$ qui commute avec tous les éléments de G est inversible.
En déduire que f est de la forme $\lambda \cdot \mathrm{id}$.

Solution. *On montre que $\ker(f)$ est G-invariant. En effet pour $x \in \ker(f)$ et $g \in G$ on a*

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0.$$

Ainsi $\ker(f)$ est G-invariant et comme $\ker(f) \neq V$ on observe que f et inversible.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f alors on a que $f - \lambda \cdot id$ commute avec tous les éléments de G. Si $f - \lambda \cdot id$ est non-nulle alors par la première partie on obtient une contradiction. Ainsi $f - \lambda \cdot id = 0$ et on a gagné.

Exercice 8. Trouver toutes les formes normales de Jordan possibles pour une matrice $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ dont le polynôme minimal est $m_A(x) = x^2(x-1)^3$.

Solution. *On observe immédiatement que les valeurs propres de la matrice A sont 0 et 1 et par des résultats du cours et des séries d'exercices on voit que le plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre 0 est de taille deux tandis que le plus grand bloc associé à 1 est de taille trois. Une forme normale de Jordan possible de la matrice A contient donc au moins un bloc de Jordan de taille 2 associé à 0 et un bloc de taille 3 associé à 1. Schématiquement cela donne*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & * & * & \\ & & & & & & * & * \\ & & & & & & & * \end{pmatrix}$$

et pour terminer l'exercice, il faudra compter le nombre de combinaisons de blocs possibles dans la région étoilée.

Exercice 9. Soit V l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On considère le sous-espace vectoriel W engendré par $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$, $f_3(x) = \sin(2x)$ et $f_4(x) = \cos(2x)$.
Soit $\phi : W \to W$ l'application linéaire donnée par dérivation.

1. Vérifier que les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sont linéairement indépendants.

2. Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ et en déduire la forme normale de Jordan de ϕ.

Solution. *1. Vérification immédiate.*

2. La matrice de ϕ dans la base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi la forme normale de Jordan de l'endomorphisme ϕ est

$$J = \operatorname{diag}(i, -i, 2i, -2i).$$

On remarque que ϕ est diagonalisable.

Exercice 10. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K munie d'une forme bilinéaire symétrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On considère W un sous-espace de V.

1. Montrer qu'on a toujours $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$.
2. Donner un exemple d'espace vectoriel V munie d'une forme bilinéaire symétrique et d'un sous-espace W tel que $W \neq (W^{\perp})^{\perp}$.
3. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non-dégénérée si et seulement si $W = (W^{\perp})^{\perp}$ pour tout sous-espace W.

Solution. *1. Utiliser la définition de l'espace orthogonal.*

2. On considère $V = \mathbb{R}^2$ munie de la forme bilinéaire nulle et $W = \operatorname{span}((1,0)^T)$. Ainsi on trouve $(W^{\perp})^{\perp} = \mathbb{R}^2$.

3. On prouve les deux directions de l'équivalence.

$\Longrightarrow$: *Si on considère le sous-espace W et on multiplie à droite les vecteurs (vus comme des vecteurs ligne) d'une base de W par la matrice A de la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans une base quelconque on obtient des vecteurs lignes qui, pris ensemble, forment une matrice dont le rang est égal à la dimension de W (le rang de la matrice A est maximal, donc l'image de la base de W est toujours une famille indépendante). D'un autre côté, le noyau de cette matrice répresente l'espace orthogonal de W (pourquoi?). Il a donc la dimension $n - \dim(W)$. En répétant ceci pour l'espace $W^{\perp}$, on obtient que l'espace $(W^{\perp})^{\perp}$ a la dimension $n-(n-\dim(W)) = \dim(W)$ et par la première partie de l'exercice il est donc égal à W.*

$\Longleftarrow$: *Supposons par l'absurde que la forme bilinéaire est dégénérée. Dans ce cas, le rang de sa matrice A est non-maximal. En particulier, son noyau n'est pas trivial. Prenons n'importe quel sous-espace W qui ne contient pas tous les vecteurs de $ker(A)$ (par exemple le span d'un vecteur qui n'est pas dans le noyau si la matrice A est non-nulle ou n'importe quel sous-espace strict W sinon). En observant que $ker(A) \subset (W^{\perp})^{\perp}$, on conclut que $W \neq (W^{\perp})^{\perp}$ et on a donc une contradiction.*

Exercice 11. Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n impaire et $\phi : V \to V$ une isométrie satisfaisant $\det(\phi) = 1$ (voir Take-Home Exam 3 pour la définition d'une isométrie).
Montrer qu'il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\phi(v) = v$.
En déduire que toute rotation en $\mathbb{R}^3$ possède un axe de rotation (théorème d'Euler).

Solution. *On veut montrer que ϕ admet une valeur propre égale à 1. Soient $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de ϕ. En utilisant que ϕ est une isométrie on peut montrer que $|\lambda_i| = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Puisque le polynôme caractéristique $p_\phi(x)$ de l'isométrie ϕ est réel on observe que les valeurs propres complexes viennent par paires conjuguées. Si on suppose par l'absurde que toutes les λ_i sont* *différentes de 1, on trouve une contradiction avec la formule suivante (n'oublie pas que n est impaire!)*

$$\det(\phi) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Exercice 12. Soit V un espace vectoriel réel et $\phi : V \to V$ une application linéaire qui n'admet pas de valeurs propres réelles.
Est-il possible que $\dim(V)$ soit impaire?
Montrer que tout sous-espace W qui est invariant sous ϕ a une dimension paire.

Solution. *La dimension de l'espace vectoriel V est toujours paire par une analyse du polynôme caractéristique.*
Supposons par l'absurde que W est un sous-espace invariant par ϕ de dimension impaire. Alors on peut considérer l'application linéaire $\phi|_W : W \to W$ qui admet une valeur propre réelle (pourquoi?). On trouve donc un vecteur $0 \neq w \in W$ tel que $\phi|_W(w) = \lambda w$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui est une contradiction avec les hypothèses, on a gagné.

Exercice 13. Soit A une matrice réelle symétrique, différente de la matrice zéro, telle que tout coefficient sur sa diagonale est zéro.
Montrer qu'une telle matrice est *indéfinie*, c'est-à-dire, qu'il existe deux vecteurs $u \neq v$ tels que $u^T Au < 0 < v^T Av$.

Solution. *Pour les valeurs propres λ_i de A, on sait que la trace de A est $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. La matrice A n'étant pas égale a zéro, il existe deux valeurs propres $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ (sinon, pour une matrice orthogonale P de vecteurs propres de A, on aurait $P^T AP = 0$, ce qui implique $A = 0$). Pour les vecteurs propres correspondants, on a $v_-^T Av_- < 0 < v_+^T Av_+$.*

Exercice 14. Soit $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ bijective (c'est-à-dire une permutation). On définit $f_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $f_\pi((x_1, x_2, \dots, x_n)^T) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})^T$.
Calculer toutes les valeurs propres réelles de f_π et les espaces propres associés.

Solution. *Pour un vecteur propre v avec valeur propre λ, on a $|\lambda| ||v|| = ||\lambda v|| = ||f_\pi(v)|| = ||v||$. Ceci implique que les seules valeurs propres réelles possibles sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.*

Soit v un vecteur propre pour $\lambda_1 = 1$. Ceci est équivalent à la condition

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ on a } v_i = (f_\pi(v))_i = v_{\pi(i)} \quad \text{et} \quad v \neq 0.$$

Ainsi, l'espace propre est donné par

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ on a } v_i = v_{\pi(i)}\}.$$

On montre que $\dim(E_1) > 0$. C'est vrai car $f_\pi((1, \dots, 1)^T) = (1, \dots, 1)^T$ implique $(1, \dots, 1)^T \in E_1$.

On considère $\lambda_2 = -1$. Comme π est bijective sur l'ensemble fini $\{1, \ldots, n\}$, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, il y a un entier minimal $0 < n_i \leq n$ tel que $\pi^{n_i}(i) = i$. Soit v un vecteur propre pour $\lambda_2 = -1$. Ceci est équivalent à la condition

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ on a } v_i = -(f_\pi(v))_i = -v_{\pi(i)} \quad \text{et} \quad v \neq 0. \tag{1}$$

Mais si $n_i \equiv 1 \mod 2$ pour tout i, ça implique $v_i = -v_i$ pour tout i, et le seul vecteur qui satisfait les conditions est $(0, \ldots, 0)^T$. Donc -1 n'est pas une valeur propre dans ce cas.

S'il existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ avec $n_k \equiv 0 \mod 2$, nous obtenons une série

$$v_k = -v_{\pi(k)} = v_{\pi^2(k)} = -v_{\pi^3(k)} = \cdots = v_{\pi^{n_k}(k)} = v_k,$$

avec $\pi^i(k) \neq \pi^j(k)$ pour $i \neq j$ (car n_k est minimal). Le vecteur $v \neq 0$ donné par

$$v_i = \begin{cases} 1 & i = \pi^j(k) \text{ pour } j \equiv 0 \mod 2 \\ -1 & i = \pi^j(k) \text{ pour } j \equiv 1 \mod 2 \\ 0 & i \neq \pi^j(k) \text{ pour chaque } j \in \{0, \ldots, n-1\} \end{cases}$$

remplit la condition (1). Ainsi, s'il existe un $n_k \equiv 0 \mod 2$, -1 est une valeur propre et l'espace propre est donné par

$$E_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ on a } v_i = -v_{\pi(i)}\}.$$

Exercice 15. Soit $\mathbb{R}^{n \times n}$ l'espace des matrices à coefficients réels et on définit l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ par $\phi(A) = A + A^T$.
Calculer le polynôme minimal, les valeurs propres et le polynôme caractéristique de l'application ϕ.

Solution. *On observe immédiatement que*

$$\phi(\phi(A)) = \phi(A + A^T) = 2A + 2A^T = 2\phi(A)$$

et donc $\phi^2 - 2\phi = 0$, ce qui implique que le polynôme minimal est

$$m_\phi(x) = x^2 - 2x$$

(il n'est facile de vérifier qu'aucun polynôme de degré inférieur annule ϕ).
En plus on remarque que l'espace des matrices symétriques est un espace propre de ϕ associé à la valeur propre 2 et l'espace des matrices antisymétriques est un espace propre de ϕ associé à la valeur propre 0. Comme ces deux espaces sont de dimensions $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$ respectivement on observe que ϕ est diagonalisable et on obtient immédiatement que le polynôme caractéristique de ϕ est

$$p_\phi(x) = x^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-2)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Exercice 16. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont au moins une valeur propre a la multiplicité algébrique strictement plus grande que 1. Montrer que $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ est une famille liée pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$.

Solution. *On écrit chacun des vecteurs de $v, Av, \ldots, A^{n-1}v$ comme un vecteur ligne dans une base de vecteurs propres de la matrice (pourquoi on a l'existence d'une telle base?) et on considère la matrice formée par ces lignes. Les colonnes correspondantes aux vecteurs propres de la base qui se trouvent dans le même espace propre seront alors proportionelles, donc le determinant de la matrice est nul. On conclut que la famille est liée (pourquoi?).*