Ens. : Peter Wittwer
Analyse avancée II - (n/a)
2 juillet 2021
Durée : 3 heures

n/a

n/a

SCIPER : **999999** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définies par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{xyz} \\ \sin(y-x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g(u,v) = \begin{pmatrix} u^3+v^2 \\ 2v \end{pmatrix}$$

Alors on a la matrice jacobienne suivante :

- ☐ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $J_{g\circ f}(1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Question 2 : Soit $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$h(u,v) = \big(\, u-1+v^2 \,,\, 2uv \,,\, u-1+3v \,\big)^{\mathrm{T}},$$

$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, une fonction de classe $C^1\big(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\big)$, et soit $f = g\circ h$. Alors, indépendamment du choix de g, on a :

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) + 3\dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) + 2\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) + 3\dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = 2\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) + 3\dfrac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)$

Question 3 : L'intégrale

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} \cos\left(\frac{3}{4}y^{4/3} - \frac{2}{3}y^{3/2}\right)\, dy \right) dx$$

vaut :

- ☐ $\frac{1}{12}\sin\left(\frac{1}{12}\right)$
- ☐ $\sin\left(\frac{1}{12}\right)$
- ☐ $\frac{1}{12}\cos\left(\frac{3}{4}y^{4/3} - \frac{2}{3}y^{3/2}\right)$
- ☐ 0

Question 4 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) + y'(x)^2 = 0$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ vérifie aussi :

- ☐ $y'(1) = e$
- ☐ $y'(1) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $y'(1) = -\dfrac{1}{2}$
- ☐ $y'(1) = 1$

Question 5 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin\big(x^2 - 2xy + y^2 + x - y\big)$. Alors son polynôme de Taylor d'ordre trois autour du point $(0,0)$ est donné par

- ☐ $p_3(x,y) = x - y + x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}y^3$
- ☐ $p_3(x,y) = x - y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3$
- ☐ $p_3(x,y) = x - y + x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3$
- ☐ $p_3(x,y) = x - y + x^2 - 2xy + y^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3$

Question 6 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors :

- ☐ les dérivées partielles de f en $(0,0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est de classe $C^1\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\big)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$, et la fonction dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$

Question 7 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et soit le vecteur $\mathbf{v} = (1,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$. Alors on a pour la dérivée directionnelle $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$:

☐ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = 1$ ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0,0) = 0$

Question 8 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2 + x_2x_3 - x_3x_4$, et soit $a = (1,1,1,1) \in \mathbb{R}^4$. Alors l'équation de l'hyper-plan tangent au point $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ du graphe de f,

$$\Gamma(f) = \big\{((x_1,x_2,x_3,x_4), x_5) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \colon x_5 = f(x_1,x_2,x_3,x_4)\big\}$$

est :

- ☐ $2 - 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$
- ☐ $2 - 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$
- ☐ $2 - 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0$
- ☐ $2 - 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0$

Question 9 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z + z + y^4z^5 - 22$, soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage du point $(x,z) = (1,1)$ et soit la fonction $g\colon U \to \mathbb{R}$ telle que $g(1,1) = 2$ et $\forall (x,z) \in U,\ f(x, g(x,z), z) = 0$. Alors :

- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = \dfrac{18}{41}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\dfrac{41}{18}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = \dfrac{41}{18}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1) = -\dfrac{18}{41}$

Question 10 : La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u'' + 4u = 8\sin(2t)$$

qui satisfait la condition initiale $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$ vérifie aussi :

- ☐ $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- ☐ $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- ☐ $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$
- ☐ $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$

Question 11 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine dans le premier quadrant délimité par les droites $y = x$, $y = 3x$, $y = 1 - x$ et $y = 3 - x$, c'est-à-dire soit

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y > 0,\ x \leq y \leq 3x,\ 1 - x \leq y \leq 3 - x\right\}$$

Alors, l'intégrale

$$\int_D \frac{x + y}{x^2}\, dx\, dy$$

vaut :

- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 6
- ☐ 9

Question 12 : Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y^2$. Alors le minimum global m et le maximum global M de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = y^2 - (2 - x)(x + 1) = 0$ sont :

- ☐ $m = 3$ et $M = 3$
- ☐ $m = 2$ et $M = 3$
- ☐ $m = -1$ et $M = 2$
- ☐ $m = -1$ et $M = 3$

Question 13 : Soit $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq z \leq x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\right\}$. Alors l'intégrale

$$\int_D 1\, dx\, dy\, dz$$

vaut :

- ☐ π
- ☐ 1
- ☐ -1
- ☐ $\frac{1}{2}\pi$

Question 14 : Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = -4y^3 + 4x^3 + 3y - 3x$. Alors, f possède sur $\mathbb{R}^2$:

- ☐ 1 point selle
- ☐ aucun point selle
- ☐ 2 points selles
- ☐ 4 points selles

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 15 : Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = |y|^{\frac{2}{3}}$. Alors, pour tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, admet, dans tout voisinage de x_0 suffisamment petit, exactement une solution $y(x)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Une union quelconque de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 17 : Soit $\Omega = \left\{\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ |x_1| + |x_2| < \pi\right\}$ et soit $(\mathbf{x}_k)_{k\geq 0}$, $\mathbf{x}_k \in \Omega$, une suite. Alors il existe une sous-suite $\left(\mathbf{x}_{k_j}\right)_{j\geq 0}$ qui converge vers un élément de Ω.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Soit $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un point tel que $F(x_0, y_0) = 0$, et $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ telle que $y_0 = f(x_0)$ et, $\forall x \in U,\ F(x, f(x)) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$, telle que $f(0) = 0$. Alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction qui est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$. Alors la restriction de f à un ensemble non vide fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est une fonction bornée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. Si en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le gradient de f existe, alors f est différentiable en x_0.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : L'ensemble $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 1 < x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ est connexe par arcs.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Vos réponses doivent être soigneusement justifiées et toutes les étapes de votre raisonnement doivent y figurer. Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé**.

Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Tourner les pages ! Cette section contient 3 questions à 10 points chacune !

Question 23: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Soit

$$D = \left\{ \mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \right\}.$$

Trouver, en justifiant en détail la démarche, l'image de la fonction $f \colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2^2\,,$$

c'est-à-dire déterminer l'ensemble $I = \{y \in \mathbb{R} \colon \exists \mathbf{x} \in D \text{ tel que } y = f(\mathbf{x})\}$.

Question 24: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Remarque : le théorème de Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}^n$ est supposé connu et peut être utilisé pour répondre aux questions qui suivent.

(a) Montrer qu'un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite (x_k) convergente d'éléments $x_k \in X$ converge vers un élément de X.

(b) Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact non vide. Démontrer que toute fonction $f\colon C \to \mathbb{R}$ qui est continue sur C est bornée sur C.

Question 25: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 *Réservé au correcteur*

Soit l'équation différentielle pour une fonction $y(x)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$y' = 2xy^2$$

Trouver, pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ donné, la solution maximale telle que $y(x_0) = y_0$.