Corrigé question 23

2 points

D est fermé
D est borné
$\Big\}$ ou D est compact

1 point

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2$$

est continue (car f un polynôme)

1 point

la restriction de f à D est une fonction continue (par la définition du cours)

$\Longleftrightarrow$?? 2 points.

1 point

(par le théorème vu au cours :) <u>une fonction continue sur un ensemble compact</u> (est bornée) et <u>admet un maximum</u> et <u>un minimum</u>

1 point

D est connexe par arc ("évident", pas de démonstration demandée)

1 point

(par le théorème vu au cours)
(par le théorème des valeurs intermédiaire).

toute fonction continue sur un ensemble compact et connexe par arcs admet toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M] \equiv I$ où m est le minimum et M le maximum (absolu, global) de la fonction.

3 points (calcul de m et M)

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in D, \ f(x) \geqslant 0 \\ (0,0,1) \in D \ \text{(ou similaire) et } f(0,0,1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 0.$$

Calcul de M

$x \in \overset{\circ}{D}$: $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 x_2^2, 2x_1^2 x_2, 0)^T = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$.
et $f(0, x_2, x_3) = f(x_1, 0, x_3) = 0$

$x \in D \setminus \overset{\circ}{D}$: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$
ou $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$. $\} C$.

Avec multiplicateur de Lagrange.

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 x_2^2 - \lambda (C - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

① $2x_1 x_2^2 + 2\lambda x_1 = 0$
② $2x_1^2 x_2 + 2\lambda x_2 = 0$.

③ $2\lambda x_3 = 0$

④ $C - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$

③ <u>cas $\lambda = 0$</u> $\underset{①}{\Rightarrow} 2x_1 x_2^2 = 0 \Rightarrow f(\cdot\ \cdot) = 0$

<u>cas $x_3 = 0$</u> , $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ (sinon $f = 0$)

① $\lambda = x_2^2 \underset{②}{\Rightarrow} 2x_1^2 x_2 - 2x_2^3 = 0$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\underset{\substack{④ \\ x_3 = 0}}{\Rightarrow} C - 2x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2^2 = \frac{C}{2}$

$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{C^2}{4} \leq \frac{4^2}{4} = 4$

$I = [0, 4]$

Corrigé question Q24

(a) 5 points

$\Leftarrow$ ("si") 3 points.

(*) $\begin{cases} \text{Supposons que toute suite convergente } (x_k),\ x_k \in X, \\ \text{converge vers un élément de } X. \end{cases}$

Raisonnement par l'absurde

Supposons (*) mais X pas fermé

$\Rightarrow X^c$ pas ouvert.

$\Rightarrow \exists\ \bar{x} \in X^c$ tel que

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists\ x_k \in X \cap B(\bar{x}, \frac{1}{k})$.

$\Longrightarrow$ (définition de la limite) $\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} \bar{x} \in X$ en contradiction avec $\bar{x} \in X^c$

"$\Longrightarrow$" (seulement si) (2 points).

(*) $\begin{cases} \text{Soit } X \text{ fermé et } (x_k),\ x_k \in X \text{ une suite} \\ \text{telle que } \lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$

Raisonnement par l'absurde.

Supposons (*) mais $\bar{x} \in X^c$. Vu que X^c est ouvert il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\bar{x}, \varepsilon) \cap X = \emptyset$.
Mais par la définition de la limite $\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}$

il existe $k_0 > 0$ tel que $\forall k \geq k_0$ $\quad x_k \in B(\bar{x}, \varepsilon)$
en contradiction avec $B(\bar{x}, \varepsilon) \cap X = \phi$.
Don $\bar{x} \in X$.

(b) 5 points.

Démonstration par l'absurde.

1 point

Soit f continue sur un compact C, mais
f non borné, c'est à dire $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$\exists\ x_k \in C$ tel que. $|f(x_k)| > k$.

construction of séquence.

2 points.

C étant compact on peut extraire de
x_k une sous-suite $(x_{k(p)})_{p \geq 0}$ telle que.

i) la suite $x_{k(p)}$ converge.

(par Bolzano-Weierstrass et C borné).

ii) $\lim\limits_{p \to \infty} x_{k(p)} = \bar{x} \in C$

car C fermé
voir (a)

1 point

Par la continuité de f (en fait $|\ | \circ f$) on a

$$\lim_{p \to \infty} |f(x_{k(p)})| = \left|f\left(\lim_{p \to \infty} x_{k(p)}\right)\right| = |f(\bar{x})| < \infty.$$

1 point

mais $|f(x_{k(p)})| > \underbrace{k(p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty}_{\text{par définition de ce que c'est une sous-suite.}}$

et on arrive à une contradiction.

Corrigé Q25

Soit le problème de Cauchy

$$y' = 2x \cdot y^2$$

$$y(x_0) = y_0$$

où $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Séparation des variables. (3 points)

i) $y(x) = 0$ est une solution sur $I = \mathbb{R}$.

on a existence et unicité (locale), donc en tout point du plan la solution est unique.

$y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ est la solution maximale pour toute condition initiale de la forme $(x_0, 0)$

ii) $\frac{dy}{y^2} = x^2$.

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + C}$$

$$y(x_0) = y_0 = -\frac{1}{x_0^2 + C}$$

$$C = -\frac{1}{y_0} - x_0^2.$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{y_0} - x_0^2 + x^2} = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + x_0^2 - x^2}}$$

<u>cas I</u> $\quad \frac{1}{y_0} + x_0^2 = 0$

$$y(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad x \in \,]0, +\infty[$$

ou $x \in \,]-\infty, 0[$.

<u>cas II</u>: $\quad \frac{1}{y_0} + x_0^2 < 0$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + \frac{1}{x_0^2} - x^2} \quad , x \in \mathbb{R}.$$

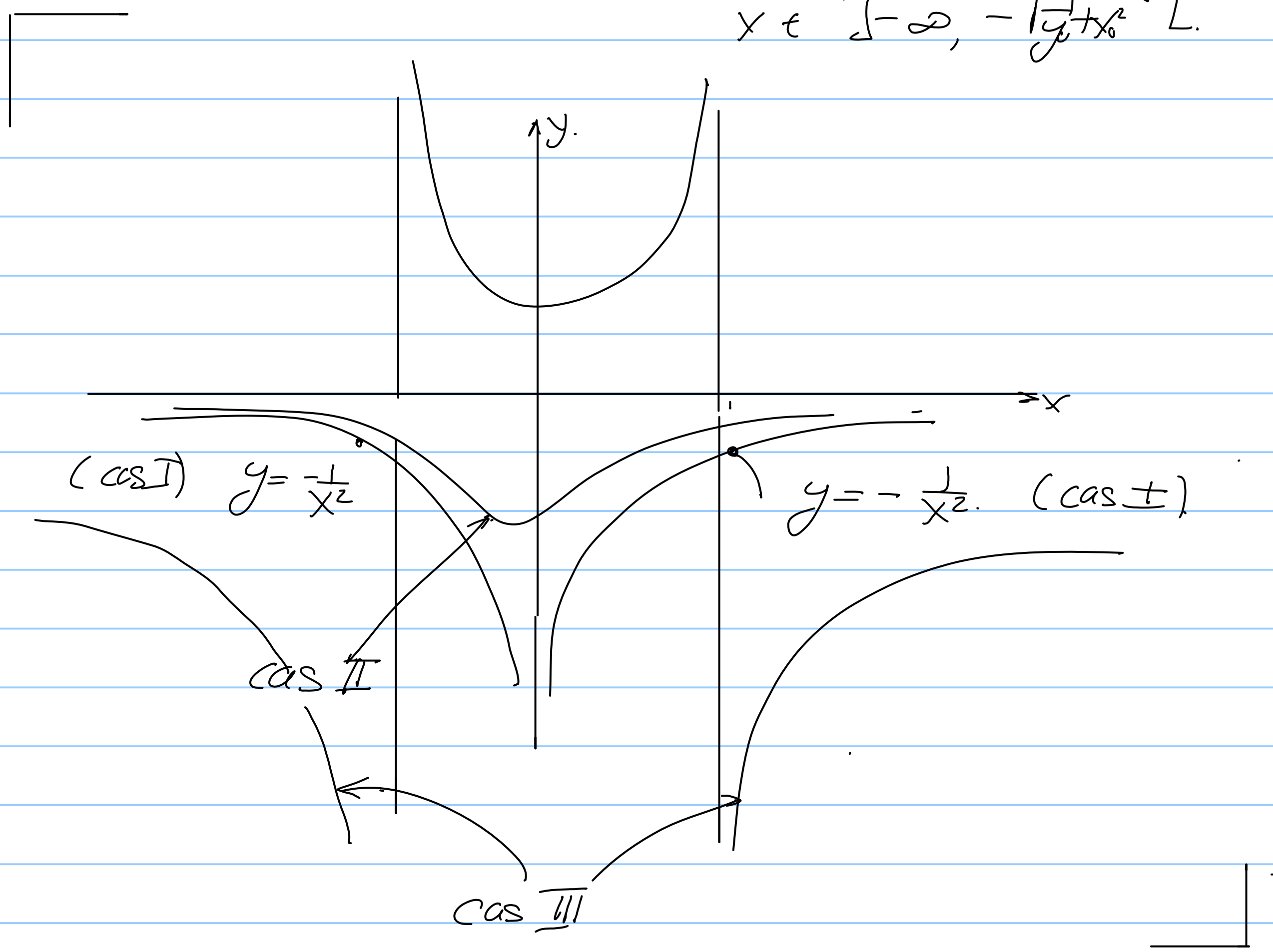
<u>cas III</u>: $\quad \frac{1}{y_0} + x_0^2 > 0.$ $\qquad x \in \,]-\sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^2}, \sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^2}[.$

ou

$x \in \,]\sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^2}, +\infty[.$

ou

$x \in \,]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{y_0} + x_0^2}[.$



Donc résumé

1p $\boxed{0)\ (x_0, 0) : \quad y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.}$

1p $\boxed{ia)\ (x_0, -\frac{1}{x_0^2}),\ x_0 > 0 : \quad y(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x > 0}$

1p $\boxed{ib)\ (x_0, -\frac{1}{x_0^2}),\ x_0 < 0 : \quad y(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x < 0.}$

1p ii). $\frac{1}{y_0} + x_0^2 < 0 \iff \frac{1}{y_0} < -x_0^2 \iff 0 > y_0 > -\frac{1}{x_0^2}$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + x_0^2 - x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1p iiia) $\underbrace{\frac{1}{y_0} + x_0^2}_{= C^2,\ C>0} > 0, \quad \underline{y_0 > 0}$

$$y(x) = \frac{1}{C^2 - x^2}, \quad x \in]-C, C[.$$

1p iiib) $, \quad \underline{y_0 < 0,\ x_0 > 0}$

$$y(x) = \frac{1}{C^2 - x^2}, \quad x \in]C, +\infty[.$$

1p iii c). $, \quad \underline{y_0 < 0,\ x_0 < 0}$

$$y(x) = \frac{1}{C^2 - x^2}, \quad x \in]-\infty, -C[.$$