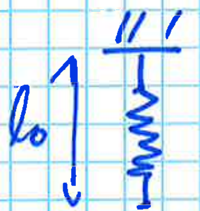
Chapitre II - Oscillateur harmonique

Le principe fondamental de la dynamique s'applique à des situations beaucoup plus générales que le mouvement des objets dans le champ de pesanteur. L'un des problèmes qui trouve le plus grand nombre d'applications en physique est celui de l'<u>oscillateur harmonique</u>, un modèle qui décrit les petites oscillations de toute sorte de systèmes autour de sa position d'équilibre. L'exemple le plus simple est celui d'une masse attachée à un ressort.

I - Ressort - Loi de Hooke:

Considérons un ressort de longueur au repos l_0. Si on tire sur le ressort, ou si on le comprime, le ressort va exercer une force qui s'oppose à la déformation.



La <u>loi de Hooke</u>, vérifiée empiriquement, stipule que, tant que la déformation n'est pas trop grande, la force est proportionnellement à l'allongement ou à la contraction du ressort:

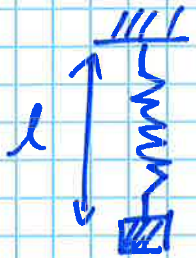
$$\|\vec{F}\| = k\,|\ell-\ell_0|, \quad k = \underline{\text{raideur}}$$

Si on choisit un axe z orienté vers le ressort, un axe vertical vers le haut pour un ressort suspendu à un support, on a donc :

$$F_z = k(\ell-\ell_0).$$

En effet, si $\ell > \ell_0$, le ressort exerce une force de rappel, donc positive si l'orientation est dans le sens du ressort.

II_ Position d'équilibre



Considérons désormais le cas où une masse m est attachée au ressort. Si l'extension du ressort est égale à ℓ, la masse est soumise à la somme de son poids et de la force de rappel :

$$F_z = -mg + k(\ell-\ell_0)$$

A l'équilibre, cette force s'annule

$$\rightarrow \quad mg = k(\ell-\ell_0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ell_{éq} = \ell_0 + \frac{m}{k}g}$$

III - Petites oscillations

Choisissons un repère dont l'origine est à la position d'équilibre, avec l'axe z toujours orienté vers le haut.

L'allongement du ressort est donné par $l = l_{éq} - z$, et la force totale s'écrit :

$$
\begin{aligned}
F_z &= -mg + k(l - l_0) \\
&= -mg + k(l_{éq} - z - l_0) \\
&= -kz
\end{aligned}
$$

puisque $mg = k(l_{éq} - l_0)$.

Ainsi, le mouvement de la masse est régi par l'équation différentielle :

$$m\ddot{z} = -kz$$

Dans ce genre de problème, il est usuel de mettre du même côté tous les termes qui dépendent de la fonction inconnue, et cette équation est habituellement écrite :

$$\boxed{m\ddot{z} + kz = 0}$$

C'est une équation que nous n'avons pas encore rencontrée. (La résistance de l'air introduit un terme proportionnel à $\dot{z}$, pas à z). Il existe une méthode systématique de résolution d'une équation du type

$$\ddot{z} + f(z) = 0$$

et nous y reviendrons plus tard dans ce cours, mais dans le cas $f(z) = az$, la solution est tellement simple que l'on peut se passer de la solution générale. Il suffit en effet de chercher une fonction qui est proportionnelle à sa dérivée seconde. Mais il y a deux exemples bien connus :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\cos(at) = -a\sin(at) \\ \dfrac{d}{dt}\sin(at) = a\cos(at) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\cos(at) = -a^2\cos(at) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\sin(at) = -a^2\sin(at) \end{cases}$$

Cherchons donc la solution de

$$m\ddot{z} + kz = 0$$

sous la forme $z = \cos(\omega t)$ (la notation ω est conventionnelle pour une fréquence dont la dimension est l'inverse d'un temps) :

$$-\omega^2 m \cos(\omega t) + k \cos(\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (k - \omega^2 m) \cos(\omega t) = 0$$

Cette équation est satisfaite pour tout t si $k - \omega^2 m = 0$, soit

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

On vérifie aisément que $\sin(\omega t)$ est aussi solution. Par ailleurs, on peut multiplier $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$ par des constantes arbitraires. La solution générale peut donc s'écrire :

$$\boxed{z(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t}$$

Les constantes A et B sont ajustées comme d'habitude, avec les conditions initiales. Supposons par exemple qu'on parte à l'instant $t = 0$ en déplaçant la masse d'une distance d vers le bas, et qu'on la lâche sans vitesse initiale :

$$\begin{cases} z(t=0) = -d \\ \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -d \\ -A\omega \sin(\omega \times 0) + B\omega = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -d, \quad B = 0.$$

La solution est un simple mouvement d'oscillation :

$$\boxed{z(t) = -d \cos(\omega t)}$$

De telles oscillations qui font intervenir une seule fréquence sont dites <u>harmoniques</u>

On écrit aussi parfois la solution sous la forme d'1 seule fonction trigonométrique avec un déphasage φ :

$$\boxed{z(t) = C \cos(\omega t + \varphi)}$$

En développant le cosinus, on peut relier C et φ à A et B :

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C \cos\varphi = A \\ -C \sin\varphi = B \end{cases} \Rightarrow$$

qui a pour solution $C = \pm\sqrt{A^2+B^2}$ et $\tan\varphi = -B/A$.

Avec cette forme, le problème précédent conduit à

$$\begin{cases} C\cos\varphi = -d \\ -\omega C \sin\varphi = 0 \end{cases}$$

On peut choisir $\varphi = 0$ et $C = -d$, ce qui conduit à la même solution, ou $\varphi = \pi$ et $C = d$, ce qui revient au même puisque $\cos(\omega t + \pi) = -\cos(\omega t)$.

La période des oscillations est le temps T que met le système à revenir à la même position. Autrement dit, on cherche T tel que

$$\cos(\omega(t+T)) = \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \cos(\omega t + \omega T) = \cos\omega t \quad (\forall t)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $\omega T = 2\pi n$, n entier. La plus petite solution non nulle est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ainsi, la période des oscillations d'une masse m accrochée à un ressort de raideur k est donnée par :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Cette période dépend de m et de k mais pas de l'amplitude C des oscillations.

IV - Oscillations amorties

Dans un traitement plus réaliste, il faut prendre en compte des forces qui vont progressivement amortir ce mouvement. L'une d'elle est la force de frottement due à la résistance de l'air : $\vec{F}_r = -b\vec{v}$. Si l'on prend cette force en compte, l'équation différentielle en z devient :

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0$$

Pour trouver une solution, l'idéal serait que la dérivée première et la dérivée seconde de z soient proportionnelles à z. Mais nous connaissons une telle fonction :

$$\frac{d}{dt}\exp(\gamma t) = \gamma \exp(\gamma t) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\exp(\gamma t) = \gamma^2 \exp(\gamma t)$$

Cherchons donc une solution de la forme $z(t) = \exp(\gamma t) \; (= e^{\gamma t})$

$$m\gamma^2 e^{\gamma t} + b\gamma\, e^{\gamma t} + k\, e^{\gamma t} = 0$$

$$\Rightarrow \; e^{\gamma t} \left(m\gamma^2 + b\gamma + k \right) = 0$$

vrai $(\forall t)$ si

$$m\gamma^2 + b\gamma + k = 0$$

γ doit donc être solution d'une équation du second degré. Son discriminant est donné par

$$\Delta = b^2 - 4km.$$

Il peut être positif ou négatif. Il faut donc envisager plusieurs cas de figure :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4km > 0}$$

Dans ce cas, il y a deux solutions réelles données par

$$\gamma_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}$$

Notons que, puisque $b > 0$, les deux solutions sont négatives :

$$\gamma_2 < \gamma_1 < 0.$$

Comme précédemment, la solution générale est de la forme

$$z(t) = A\, e^{\gamma_1 t} + B\, e^{\gamma_2 t}$$

Avec les conditions initiales habituelles ($z(t=0) = -d$, $\dot{z}(t=0) = 0$), il vient :

$$\begin{cases} A + B = -d \\ A\gamma_1 + B\gamma_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-d}{1-\gamma_1/\gamma_2} \\ B = \dfrac{-d}{1-\gamma_2/\gamma_1} \end{cases}$$

La solution est la somme de deux exponentielles décroissantes. Elle tend vers 0 à la limite $t \to +\infty$. C'est le régime fortement amorti dit <u>supercritique</u>. La décroissance est dominée par $e^{\gamma_1 t}$ aux temps longs.

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4km = 0}$$

Dans ce cas, l'équation a 1 racine double $\gamma = \dfrac{-b}{2m}$. On pourrait en déduire que la solution générale est de la forme $z(t) = A\, e^{\gamma t}$, mais ce n'est pas possible : comme on peut fixer indépendamment la position initiale <u>et</u> la vitesse initiale, il faut deux constantes d'intégration.

Cela suggère que si on cherche la solution sous la forme

$$z(t) = e^{\gamma t} u(t),$$

la solution la plus générale pour $u(t)$ n'est pas $u(t) =$ constante. Ecrivons l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$. Comme

$$\dot{z}(t) = \gamma e^{\gamma t} u(t) + e^{\gamma t} \dot{u}(t)$$

$$\ddot{z}(t) = \gamma^2 e^{\gamma t} u(t) + \gamma e^{\gamma t} \dot{u}(t) + \gamma e^{\gamma t} \dot{u}(t) + e^{\gamma t} \ddot{u}(t)$$

$$= \gamma^2 e^{\gamma t} u(t) + 2\gamma e^{\gamma t} \dot{u}(t) + e^{\gamma t} \ddot{u}(t)$$

l'équation différentielle pour $u(t)$ est donnée par

$$m\left(\gamma^2 e^{\gamma t} u + 2\gamma e^{\gamma t} \dot{u} + \ddot{u} e^{\gamma t}\right) + b\left(\gamma e^{\gamma t} u + e^{\gamma t} \dot{u}\right) + k e^{\gamma t} u = 0$$

$$\Rightarrow e^{\gamma t}\left[m\ddot{u} + (b + 2\gamma m)\dot{u} + (m\gamma^2 + b\gamma + k)u\right] = 0$$

Mais $m\gamma^2 + b\gamma + k = 0$ puisque γ est solution de l'équation du second degré, et $\gamma = \frac{-b}{2m}$ pour $\Delta = 0$, ce qui implique que le coefficient de $\dot{u}$, $(b + 2\gamma m)$, est aussi égal à 0. L'équation différentielle en u se réduit donc à:

$$m e^{\gamma t} \ddot{u} = 0 \Rightarrow \ddot{u} = 0$$

dont la solution générale est de forme $u = A + Bt$.

Ainsi, la solution générale lorsque $b^2 - 4km = 0$ est de la forme :

$$\boxed{z(t) = (A + Bt)\, e^{\gamma t}} \quad , \quad \gamma = \frac{-b}{2m}.$$

$z(t)$ tend aussi vers 0 de façon monotone quand $t \to +\infty$, mais moins vite. C'est le régime dit <u>critique</u>.

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4km < 0}$$

Dans ce cas, l'équation du second degré a deux racines complexes :

$$\begin{cases} \gamma_+ = \dfrac{-b + i\sqrt{4km - b^2}}{2m} \\ \gamma_- = \dfrac{-b - i\sqrt{4km - b^2}}{2m} \end{cases}$$

Ces deux racines sont complexes conjuguées, ce qui est normal puisque leur somme, $\frac{-b}{m}$, est réelle.

Écrivons ces racines

$$\gamma_+ = \gamma + i\tilde{\omega}, \quad \gamma_- = \gamma - i\tilde{\omega}$$

avec $\gamma = \frac{-b}{2m}$ et $\tilde{\omega} = \frac{\sqrt{4km - b^2}}{2m}$

ou encore $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la fréquence de l'oscillateur non amorti.

La solution générale dans $\mathbb{C}$ est de la forme

$$z(t) = e^{\gamma t}\left(A e^{i\tilde{\omega}t} + B e^{-i\tilde{\omega}t}\right) \quad , A, B \in \mathbb{C}$$

Pour trouver des solutions réelles, il suffit de prendre la partie réelle de cette solution. Posons $A = A_1 + iA_2$ et $B = B_1 + iB_2$

$$\mathrm{Re}\left(A e^{i\tilde{\omega}t} + B e^{-i\tilde{\omega}t}\right) = A_1 \cos\tilde{\omega}t - A_2 \sin\tilde{\omega}t$$
$$+ B_1 \cos\tilde{\omega}t + B_2 \sin\tilde{\omega}t$$
$$= (A_1 + B_1)\cos\tilde{\omega}t + (B_2 - A_2)\sin\tilde{\omega}t.$$

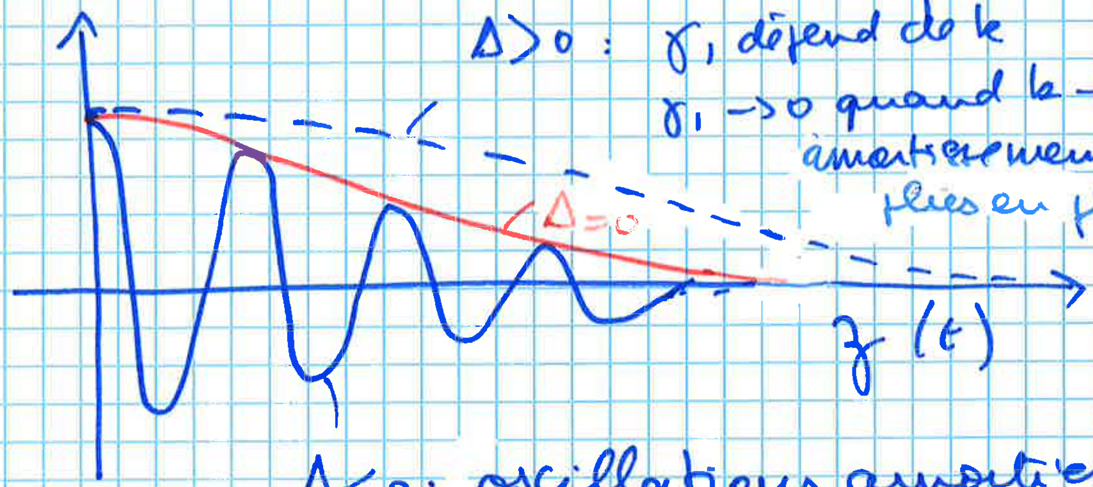
Puisque A_1, B_1 A_2 et B_2 sont quelconques, cela signifie que la solution réelle la plus générale est de la forme

$$\boxed{z(t) = e^{\gamma t}\left(\tilde{A}\cos\tilde{\omega}t + \tilde{B}\sin\tilde{\omega}t\right)}$$

ou encore, comme vu précédemment,

$$z(t) = e^{\gamma t} C \cos(\tilde{\omega}t + \varphi).$$

Il s'agit d'oscillations amorties de fréquence $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. C'est le régime dit sous-critique.



V – Oscillations forcées – Résonance :

Si on veut forcer un oscillateur à osciller à une certaine fréquence sans amortissement, on peut y parvenir en le soumettant à une force dépendant du temps de façon harmonique :

$$f \cos(\omega t)$$

où ω est une fréquence arbitraire. L'équation différentielle prend la forme :

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = f\cos(\omega t)$$

La solution générale est la somme de la solution sans second membre et d'une solution particulière. Nous connaissons déjà la forme de la solution générale de l'équation sans second membre, et dès que $b > 0$, cette solution décroît exponentiellement vite (avec ou sans oscillations).

Cherchons donc une solution de l'équation avec second membre. Si on prend une combinaison linéaire de $\cos(\omega t)$ et de $\sin(\omega t)$, le membre de gauche sera encore une combinaison linéaire de $\cos(\omega t)$ et de $\sin(\omega t)$, et en annulant le coefficient de $\sin(\omega t)$, on pourra satisfaire l'équation.

Posons donc

$$z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \dot{z} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t).$$

L'équation différentielle conduit à :

$$m(-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t)$$

$$+b(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)$$

$$+k(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = f\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \cos\omega t\left[-mA\omega^2 + bB\omega + kA - f\right]$$

$$+\sin\omega t\left[-mB\omega^2 - bA\omega + kB\right] = 0$$

Cette équation sera satisfaite dès que

$$\begin{cases} (k - m\omega^2)A + b\omega B = f \\ -b\omega A + (k - m\omega^2)B = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est égal à $\mathrm{Det} = (k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2$. Il est strictement positif dès que $b \neq 0$, et il y a donc une solution unique en A et B :

$$A = B \, \frac{k - m\omega^2}{b\omega}$$

$$\Rightarrow B \left[\frac{(k - m\omega^2)^2}{b\omega} + b\omega \right] = f$$

soit
$$\begin{cases} B = f \, \dfrac{b\omega}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \\[2ex] A = f \, \dfrac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \end{cases}$$

Cette solution peut être, comme vu précédemment, réécrite sous la forme

$$z(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

avec $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et $\tan \varphi = -\dfrac{B}{A}$

soit $\tan \varphi = \dfrac{b\omega}{m\omega^2 - k}$

et $C = f \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$

A l'aide de $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, et de $\gamma = \dfrac{-b}{2m}$, ce résultat se réécrit:

$$\tan \varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

et $$\boxed{C = \frac{f}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}$$

Pour des temps assez grands, la solution (dite transitoire) de l'équation sans second membre devient négligeable vu qu'elle décroît exponentiellement alors que la solution particulière oscille à la fréquence ω.

Le phénomène remarquable, c'est que l'amplitude des oscillations dépend de la fréquence, et qu'elle devient très grande pour les systèmes peu amortis lorsque ω s'approche de ω_0. L'amplitude est maximale lorsque $\dfrac{d}{d\omega^2}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right] = 0$

$$\Rightarrow \quad 2(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$$

Lorsque $\gamma \to 0$, la fréquence du maximum tend vers ω_0, et l'amplitude diverge ! Ce phénomène est connu sous le nom de <u>résonance</u>, et il peut avoir des conséquences catastrophiques si, par malchance, un système est perturbé par une action extérieure qui agit à une fréquence proche de sa fréquence propre.