Chapitre V - Moment cinétique et force centrale - Gravitation

Dans un mouvement rectiligne uniforme, la vitesse est constante. Dans un mouvement de rotation uniforme autour d'un point, la vitesse n'est pas conservée, mais il y a néanmoins une quantité conservée. En effet,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_{=0} + \underbrace{\vec{r} \wedge \vec{a}}_{\substack{=0 \text{ parce que} \\ \vec{a} \parallel \vec{r}}} = \vec{0}$$

Cela suggère d'introduire, à côté de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$.
L'objet de ce chapitre est d'étudier les propriétés du moment cinétique, et d'en déduire la solution générale du problème d'un point matériel soumis à une force centrale, avec application à la gravitation.

I - Moment cinétique

a) Le moment cinétique d'un point M par rapport à un point O est défini par :

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} \equiv \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}.$$

Si O est l'origine du repère, on note $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, et le moment cinétique est simplement noté

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\, \vec{r} \wedge \vec{v}}$$

On peut définir le moment cinétique par rapport à n'importe quel point. Dans ce cas, on a :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{v} + \vec{L}_0$$

En effet, $\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \wedge m\vec{v}.$

$$= \overrightarrow{AO} \wedge m\vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \quad \checkmark$$

b) On définit de façon similaire le <u>moment d'une force</u> s'appliquant au point M par rapport à un point O par :

$$\vec{M}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

c) <u>Théorème du moment cinétique :</u>

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un point O est égale au moment par rapport au point O de la somme $\vec{F}$ des forces appliquée au point matériel :

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Démonstration : C'est une conséquence directe du principe fondamental.

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{p}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{p}}_{=0 \text{ car } \vec{v} /\!/ \vec{p}} + \vec{OM} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{=\vec{F}}$$

II – Mouvement à force centrale

Une force est dite centrale si elle pointe toujours en direction d'un même point O : $\vec{F}(M) /\!/ \vec{OM}$.

Théorème : Si un point matériel est soumis à une force centrale de centre O, son moment cinétique par rapport à O est constant.

Démo : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = 0$ puisque, par hypothèse, $\vec{F} /\!/ \vec{OM}$.

Exemples : ① La force de gravitation exercée par une particule sur une autre est une force centrale centrée sur la particule. Si l'on prend la position de la particule comme centre du repère en coordonnées sphériques, on a :

$$\vec{F} = -\frac{c}{r^2}\vec{e_r}$$

② La force exercée par un ressort attaché en un point O est aussi une force centrale. Si le ressort peut prendre n'importe quelle direction, la force est donnée par

$$\vec{F} = k(l_0 - r)\vec{e_r}$$

où l_0 est la longueur au repos du ressort.

<u>Proposition :</u> Si une force centrale est conservative, le potentiel associé ne dépend que de r.

<u>Démo :</u> Considérons un potentiel $V(r,\theta,\phi)$. Son gradient en coordonnées sphériques est donné par

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e_\phi}$$

Pour s'en convaincre, considérons V comme fonction de $\vec{r}(t)$. En cartésiennes

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} = \vec{\nabla}V \cdot \vec{v}$$

En sphériques,

$$\frac{d}{dt} V(\vec{r}(t)) = \frac{\partial V}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \phi}\dot{\phi} = \vec{\nabla} V . \vec{v}$$

Sachant que $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\,\vec{e}_\phi$, on en déduit la formule du gradient.

Du coup, pour que $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ soit proportionnel à $\vec{e}_r$, il faut que

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$\Rightarrow V(r)$: V ne dépend que de r.

Pour la gravitation, nous avons déjà vu que

$$V(r) = -\frac{C}{r},$$

en accord avec $\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r$.

Pour le ressort, on a de même

$$V(r) = \frac{1}{2} k (r - l_0)^2.$$

III - Solution générale du mouvement à force centrale dérivant de $V(r)$

1) Le mouvement se fait dans un plan.

En effet, $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{OM}$, ce qui implique, si $\vec{L}$ est constant, que $\vec{OM}$ est perpendiculaire à la direction de $\vec{L}$. Si on se place en coordonnées cylindriques d'axe $Oz \parallel \vec{L}$, on a donc :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\phi}\,\vec{e}_\phi \quad \text{et} \quad \vec{r} = r\,\vec{e}_r$$

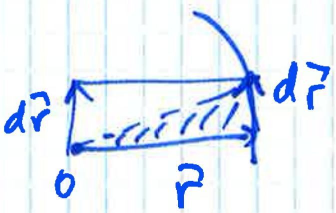
$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m\, r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m r^2 \dot{\phi}\, \vec{e}_z \,, \qquad \|\vec{L}\| \equiv L = m r^2 \dot{\phi}.$$

2) Le mouvement suit la <u>loi des aires</u> :

"La surface balayée par le vecteur $\vec{OM}$ par unité de temps est constante."

En effet, si on définit l'aire $d\mathcal{A}$ par la norme de $d\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \wedge d\vec{r}$, on a $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}\left\|\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \frac{1}{2m} L$



$$\Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{constante}.$$

3) <u>Conservation de l'énergie</u> :

L'énergie cinétique est donnée par

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{V(r)}_{\text{énergie potentielle}}}_{\text{énergie mécanique}} = E = \text{cste}$$

Mais $m r^2 \dot{\phi} = L$ = constante

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m r^2} + V(r) = E$$

C'est un mouvement unidimensionnel dans un potentiel effectif donné par

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m r^2} + V(r)$$

C'est la forme de ce potentiel effectif qui doit être utilisée pour discuter la nature générale du mouvement (points d'équilibre, stabilité etc.)

<u>Trajectoire</u> : Le long de la trajectoire, on peut considérer que $\phi(t)$ est en fait une fonction de $r(t)$, $\phi(r(t))$, d'où :

$$\frac{d}{dt}\phi = \frac{d\phi}{dr}\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}}$$

Or, $\dot{\phi} = \dfrac{L}{m r^2}$

et $\dot{r} = \sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{L}{r^2 \sqrt{2m\left(E - V_{eff}(r)\right)}}$$

On en déduit que

$$\phi(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{L\,dr'}{r'^2\sqrt{2m(E - V_{eff}(r'))}} + \phi_0 .$$

IV - Problème de Kepler

Le problème de Kepler correspond à la gravitation, avec

$$V(r) = -\frac{C}{r}, \quad C > 0 .$$

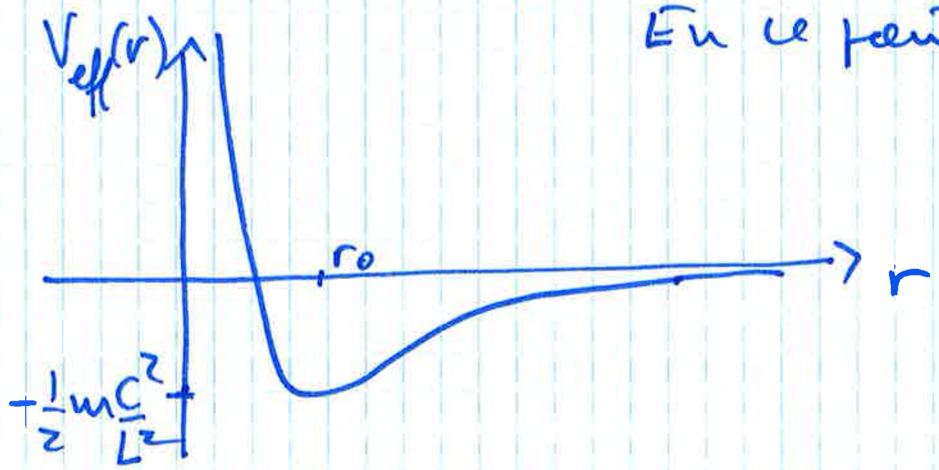
Le potentiel effectif est donné par

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{C}{r}$$

Il diverge vers le haut quand $r \to 0$, il tend vers 0 quand $r \to +\infty$, et il passe par un minimum quand

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{C}{r^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{mC}$$

En ce point, $V_{eff}(r_0) = -\frac{1}{2}\frac{mC^2}{L^2}$



Le mouvement n'est possible que si
$$E \geq -\frac{1}{2} m \frac{C^2}{L^2}.$$

Si $E = -\frac{1}{2} m \frac{C^2}{L^2}$, $\dot{r} = 0 \Rightarrow$ le mouvement est circulaire.

Si $-\frac{1}{2} m \frac{C^2}{L^2} < E < 0$, le mouvement oscille entre 2 rayons r_1 et r_2.

Si $E \geq 0$, le point matériel peut à l'infini.

Pour trouver les trajectoires, on peut utiliser la formule générale donnée par une intégrale (exercice), mais il est plus simple de décrire la trajectoire par $u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)}$.

Du coup, $\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi}$

$$= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{L}{m} u^2$$

ce qui permet de réécrire l'énergie sous la forme
$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m} \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right] - C u$$

Comme l'énergie mécanique est constante, la dérivée de cette expression par rapport à ϕ doit être constante, d'où :

$$\frac{L^2}{m}\frac{d^2u}{d\phi^2}\frac{du}{d\phi} + \frac{L^2}{m} u \frac{du}{d\phi} - C\frac{du}{d\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{Cm}{L^2}}$$

La solution générale de cette équation différentielle est bien connue. C'est la somme de la solution générale

$$u = A\cos(\phi - \phi_0)$$

et d'une solution particulière, $u = \frac{Cm}{L^2}$.

Si on pose $p = \frac{L^2}{Cm}$ et $e = Ap$, il vient :

$$u = \frac{e\cos(\phi-\phi_0)+1}{p}$$

soit $\boxed{r = \dfrac{p}{1+e\cos(\phi-\phi_0)}}$

C'est l'équation en coordonnées polaires d'une conique :

- $e = 0$: c'est un cercle
- $0 < e < 1$: c'est une ellipse
- $e = 1$: c'est une parabole
- $e > 1$: c'est une hyperbole

L'énergie mécanique est donnée par

$$E = \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\left[\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2\right] - Cu$$

$$\frac{du}{d\phi} = +\frac{e}{p}\sin(\phi - \phi_0)$$

d'où

$$E = \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}\left[\frac{e^2}{p^2}\sin^2(\phi-\phi_0) + \frac{e^2}{p^2}\cos^2(\phi-\phi_0) + 2\frac{e}{p^2}\cos(\phi-\phi_0) + \frac{1}{p^2}\right] - C\frac{e}{p}\cos(\phi-\phi_0) - \frac{C}{p}$$

$$= \frac{1}{2}Cp\left[\frac{e^2}{p^2} + \frac{2e}{p^2}\cos(\phi-\phi_0) + \frac{1}{p^2}\right] - \frac{Ce}{p}\cos(\phi-\phi_0) + \frac{C}{p}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{C}{p} + \frac{1}{2}C\frac{e^2}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{C}{p}(1-e^2)}$$

Si $e < 1$, $E < 0$: le mouvement doit être limité entre deux longueurs, ce qui est compatible avec une ellipse. Par contre, si $e \geq 1$, le mouvement n'est pas fermé.

e est appelé l'excentricité de la conique.

Les lois de Kepler:

Historiquement, Kepler a compris le mouvement des planètes avant que Newton ne formule ses lois, et ce sur la base des observations de son maître Tycho Brahé. Ces lois peuvent être formulées de la façon suivante:

1ère loi de Kepler: les trajectoires des planètes sont des ellipses, dont le Soleil est un foyer.

2ème loi de Kepler: le rayon-vecteur du Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des temps égaux.

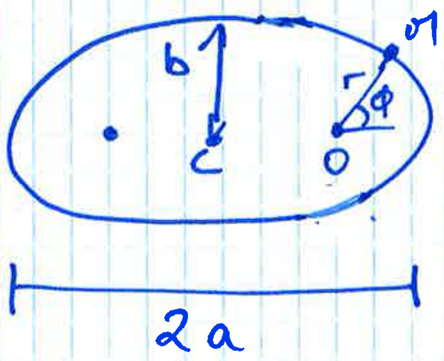
3ème loi de Kepler: si on désigne par T la période et a le ½-grand axe de l'ellipse, le rapport T^2/a^3 est le même pour toutes les planètes.

Ce sont en grande partie ces lois qui ont amené Newton à sa formulation de la gravitation. Dans ces notes, nous faisons le chemin inverse et démontrons que ces lois sont des conséquences de la gravitation.

<u>1ère loi :</u> Si une planète tourne autour du soleil, c'est que $e < 1$, et la trajectoire est une ellipse. L'origine du repère est ce qu'on appelle un <u>foyer</u>.

Si on prend $\phi_0 = 0$, l'équation est donnée par

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi}$$



Calculons le $\frac{1}{2}$ grand axe a et le $\frac{1}{2}$ petit axe b, en supposant qu'il s'agit bien d'une ellipse :

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{-e\sin\phi}{(1+e\cos\phi)^2} = 0 \text{ pour } \phi = 0, \pi$$

$$2a = \overbrace{r(\phi=0)}^{\text{min.}} + \overbrace{r(\phi=\pi)}^{\text{max.}} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}$$

$$= p\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = p\,\frac{2}{1-e^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{p}{1-e^2}}$$

La coordonnée cartésienne y a pour valeur maximale b.

Or $\quad y(\phi) = r\sin\phi = \dfrac{p\sin\phi}{1+e\cos\phi}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\phi} = p\,\frac{(1+e\cos\phi)\cos\phi - \sin\phi\,(-e\sin\phi)}{(1+e\cos\phi)^2}$$

$$\frac{dy}{d\phi} = 0 \Rightarrow (1+e\cos\phi)\cos\phi + e\sin^2\phi = 0$$

$$\Rightarrow \cos\phi + e = 0$$

$$\Rightarrow \cos\phi = -e$$

Pour cette valeur de ϕ,

$$y = \frac{p}{1-e^2}\sqrt{1-\cos^2\phi} = \frac{p}{1-e^2}\sqrt{1-e^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}}$$

Si on définit des coordonnées cartésiennes d'origine C, qu'on appelle X et Y, on a :

$$X = x + a - r(\phi=0) = x + \frac{p}{1-e^2} - \frac{p}{1+e}$$

soit $X = x + \dfrac{ep}{1-e^2} = x + ea$

et $Y = y$.

<u>Proposition</u> : X et Y sont reliés par

$$\boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1}$$

<u>Démonstration</u> :

$$r = \frac{p}{1+e\cos\phi} \Rightarrow r + \underbrace{re\cos\phi}_{=ex} = a(1-e^2)$$

114 bis

$$\Rightarrow \quad r = a(1-e^2) - ex$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = a^2(1-e^2)^2 + e^2x^2 - 2a(1-e^2)ex$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - e^2x^2 + 2ea(1-e^2)x = a^2(1-e^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2(1-e^2) + y^2 + 2eax(1-e^2) = a^2(1-e^2)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} + 2aex = a^2(1-e^2)$$

$$\Rightarrow \quad (x+ea)^2 - e^2a^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2 - a^2e^2$$

$$\Rightarrow \quad (x+ea)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(x+ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1}$$

✓

<u>2ème loi de Kepler</u> : c'est tout simplement la loi des aires, qui est valable pour tout mouvement à force centrale.

<u>3ème loi de Kepler</u> : La période est égale à la surface de l'ellipse divisée par la vitesse $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$

$$\Rightarrow T = \pi ab \times \frac{2m}{L}$$

Mais $p = \frac{L^2}{Cm} \Rightarrow L = \sqrt{Cmp}$

et $p = a(1-e^2)$

$$\Rightarrow L = \sqrt{Cm(1-e^2)}\sqrt{a}$$

$$\Rightarrow T = \pi a \underbrace{a\sqrt{1-e^2}}_{b} \frac{2m}{\sqrt{Cm(1-e^2)}} \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$= a^{3/2} \, 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{C}$$

Mais la constante $C = GMm$, où M est la masse du soleil et m la masse de la planète

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

C'est bien indépendant de m.