Analyse 1

(MATH-101(g))

Sections MX - EL - CGC

EPFL - Automne 2023

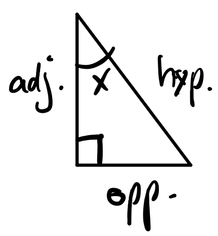
Professeur : Lénaïc Chizat

- But du cours
- Organisation :
    - 1 ECTS $\simeq$ 1h30 travail / semaine
      ⇝ 6 ECTS ⇝ 9h travail / semaine ($\underbrace{3^h}_{\text{cours}}$ + $\underbrace{1^h30}_{\text{exercices}}$ + $\underbrace{4^h30}_{\text{perso}}$)
    - série d'exercices :
        - libérée le jeudi après le cours
        - séance le lundi matin 10h-12h
        - correction libérée le lundi midi
    - 20 assistants
    - séances de soutien : du lundi au jeudi de 17h30 à 19h (à partir de la semaine 4)
    - Examen : QCM + questions ouvertes
      (pas de documents ni calculettes).

Prélude (Rappels pour la série 1)

- <u>Fonctions trigonométriques</u>

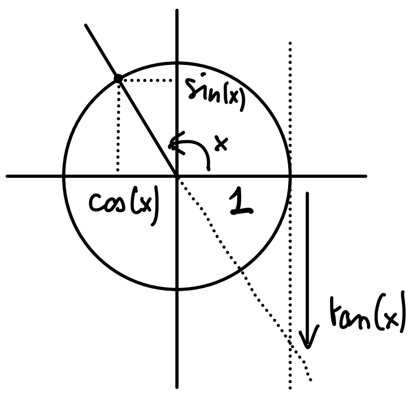
- si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$



$$\begin{cases} \sin(x) = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}} \\ \cos(x) = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}} \\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}} \end{cases}$$

- si $x \in \mathbb{R}$

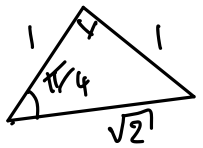
$$\boxed{\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1}$$



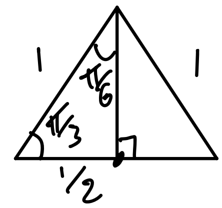
À connaître :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0

Retrouver les valeurs manquantes à l'aide des triangles suivants :



triangle rectangle isocèle



triangle équilatéral

(se souvenir que $\sqrt{2} \simeq 1,414\ldots$
$\sqrt{3} \simeq 1,732\ldots$)

Exponentielle et Logarithme

Exp : l'unique solution f de $\begin{cases} f'(x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

"Vraie" définition : $\exp(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Notion vue plus tard)

est égal par définition à

$= \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$ (de même)

En particulier : $\exp(1) = e = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ "constante d'Euler".

Log : fonction réciproque de l'exponentielle c'est-à-dire :

$$\log(\exp(x)) = x \quad , \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(\log(x)) = x \quad , \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \ , \ x > 0$$

($\log(x)$ = logarithme Népérien, aussi parfois noté $\ln(x)$, $\mathrm{Log}(x)$)

Généralisation : pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$

- On définit $a^x := \exp(x \log(a)) = e^{x \log a}$
- Pour $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ fixé, la réciproque de a^x est

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$$ (vérifier à partir de la propriété de réciprocité)

Pour $a > 1$, on l'appelle le "logarithme en base a".

Règles de calcul: ($a, b > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^x \cdot a^y = a^{x+y} \\ (a^x)^y = a^{x \cdot y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \\ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} = a^x \cdot b^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-x} \\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \end{cases}$$

Pour n entier, on a $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$ (aussi valide pour a négatif)

Racine n-ième : $\sqrt[n]{a} := a^{1/n}$

l'unique nombre positif tel que $(a^{1/n})^n = a$.

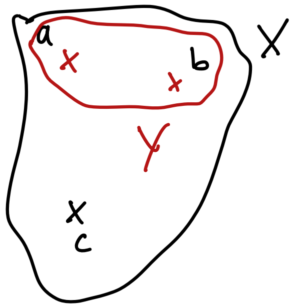
Règles de calcul du logarithme ($a > 0$, $x, y > 0$)

$$\log_a(1) = 0$$
$$\log_a(a) = 1$$
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(1/x) = -\log_a(x)$$
$$\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x) \quad (\text{pour } b \in \mathbb{R})$$

Chapitre 0. Notions de base

0.1 Ensembles

Collection d'objets (non-ordonnée, sans répétitions).



$X = \{a, b, c\}$

$Y = \{x \in X : x$ est de couleur rouge$\}$

"tel que" (aussi noté "|", ";")

$= \{a, b\}$

0.1.1. Notations

$\in$ { appartient à / est un élément de — $a \in X$

$\notin$ { n'appartient pas à / n'est pas élément de — $c \notin Y$

$\subset$ { est un sous-ensemble de / est inclus dans — $Y \subset X$, $\{a\} \subset X$

$\not\subset$ { n'est pas un sous-ensemble de / n'est pas inclus dans — $X \not\subset Y$

$=$ égalité (ont les mêmes éléments) — $Y = \{a, b\}$

$\emptyset \equiv \{\}$

$\equiv$ indique deux notations équivalentes.

Nota Bene : $\emptyset \subset X$
$X \subset X$ pour tout ensemble X.

Définition : $\mathcal{P}(X) :=$ l'ensemble des sous-ensembles de X, aussi appelé "l'ensemble des parties de X" ou "ensemble puissance de X".

Exemple : $X = \{a, b, c\}$ (3 éléments).

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$$

$(8 = 2 \times 2 \times 2$ éléments$)$

Remarque :
- $\{a, b\} = \{b, a\} = \{b, b, a\}$
- $\{a\} \subset X$, $a \in X$, $\{a\} \in \mathcal{P}(X)$
- $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$ (Aussi : $\{\{a\}\}$ est un ensemble.)

Pour aller plus loin : question de Russel à Frege (~ 1900) :

$X = \{a \; ; \; a \notin a\}$ est-ce que $X \in X$?
→ Cette définition ne peut pas être autorisée !

Si $X \in X$ alors $X \notin X$ contradiction
Si $X \notin X$ alors $X \in X$ contradiction

→ "l'ensemble de tous les ensembles n'est pas un objet mathématique autorisé.

0.1.2 Le produit cartésien

Soient X, Y, Z des ensembles

$$X \times Y = \{\underbrace{(x,y)}_{\text{un "couple", l'ordre est important.}} \; ; \; x \in X, y \in Y\}$$

<u>Exemple :</u> $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$

$$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\} \quad (4 \text{ éléments})$$

$$X \times Y \neq Y \times X \quad (\text{sauf si } X = Y)$$

Plus généralement :

$$X \times Y \times Z = \{\underbrace{(x, y, z)}_{\text{triplet}} \; ; \; x \in X, \, y \in Y, \, z \in Z\}$$

(plus généralement, on appelle $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet)

Autre exemple : $X \times X = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$