
Analyse I – Série 1

Echauffement 1. (Notion de couple)

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{3, 4\}$. Est-ce que le couple $(3, 2)$ est un élément du produit cartésien $X \times Y$?

Sol.: On a $X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$. Le couple $(3, 2)$ n'est donc pas un élément du produit cartésien $X \times Y$.

Exercice 1. (V/F : ensembles)

Soient $A, B, C \subset \mathbb{R}$ des ensembles non vides.

On note $A \setminus B$ pour la différence des ensembles A et B , et $A \cap B$ pour leur intersection, c.-à-d.

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

	V	F
a) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Sol.:

a) FAUX.

Prendre par exemple $A = [0, 2]$ et $B = [1, 3]$. Dans ce cas on a

$$\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = \mathbb{R} \setminus [1, 2]$$

et

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B) = (\mathbb{R} \setminus [0, 2]) \cap (\mathbb{R} \setminus [1, 3]) = \mathbb{R} \setminus [0, 3].$$

b) VRAI.

La réciproque (\Leftarrow) est triviale.

Pour démontrer l'implication directe (\Rightarrow), on procède par l'absurde. Supposons que $A \times B = B \times A$ et que $A \neq B$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $A \not\subset B$ et donc il existe $a \in A$ tel que $a \notin B$. Soit encore $b \in B$. Ainsi $(a, b) \in A \times B = B \times A$, ce qui veut dire que $a \in B$. Contradiction.

c) VRAI.

La preuve se fait par double-inclusion :

\subset : Soit $(x, y) \in A \times (B \cap C)$. Alors $x \in A$, $y \in B$ et $y \in C$ et donc $(x, y) \in A \times B$ et $(x, y) \in A \times C$. Cela montre que $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$.

\supset : Soit maintenant $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Alors $(x, y) \in A \times B$ et $(x, y) \in A \times C$ et donc $x \in A$, $y \in B$ et $y \in C$. Cela prouve que $(x, y) \in A \times (B \cap C)$ et donc $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$.

Exercice 2. (Relations d'équivalence)

Soit X un ensemble. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence. Quels sont dans les deux cas les ensembles quotient X/\sim ?

- $x \sim y$ ssi $x = y$, pour tout $x, y \in X$; (NB : "ssi" est une abbréviatiion pour "si et seulement si")
- $x \sim y$, pour tout $x, y \in X$.

Sol.:

- On a $x \sim x$ car $x = x$; $x \sim y$ implique $y \sim x$ car $x = y$ implique $y = x$; et $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent que $x \sim z$ car $x = y$ et $y = z$ impliquent que $x = z$. L'égalité = est donc un cas particulier d'une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences, c'est-à-dire les ensembles qui sont les éléments de X/\sim , contiennent chacune exactement un élément de X .
- Puisque $x \sim y$ pour tout $x, y \in X$, les conditions d'une relation d'équivalence sont trivialement satisfaites. L'ensemble quotient X/\sim contient l'ensemble X comme unique élément.

Exercice 3. (Relations d'équivalence)

- Montrer que $x \sim y$ ssi $xy > 0$, définit une relation d'équivalence sur \mathbb{Z}^* . Quel est l'ensemble quotient ?
- Montrer que $x \sim y$ ssi $x - y$ est pair, définit une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} . Quel est l'ensemble quotient ?
- Est-ce que $x \sim y$ ssi $x - y$ est impair, définit une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} ?

Sol.:

- Pour tout $x \in \mathbb{Z}^*$ on a $x^2 > 0$ et donc $x \sim x$. Si $xy > 0$ on a aussi $yx > 0$, si bien que $x \sim y$ implique $y \sim x$. Finalement, si $xy > 0$ et $yz > 0$ on a que $0 < (xy)(yz) = xzy^2$. Il s'en suit que $xz > 0$ si bien que $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers positifs et l'ensemble des entiers négatifs.
- Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a $x - x = 0$. Puisque 0 est un nombre pair il s'en suit que $x \sim x$. Si $x - y$ est un nombre pair, $y - x$ est aussi un nombre pair et $x \sim y$ implique donc $y \sim x$. Finalement, si $x - y$ est pair et $y - z$ est pair, il s'en suit que $x - z = (x - y) + (y - z)$ est pair, et $x \sim y$ et

$y \sim z$ impliquent donc que $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs.

- c) La relation $x \sim y$ si $x - y$ impair ne définit pas une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} . Pour tout x on a que $x - x = 0$, et puisque 0 est un nombre pair il en suit que x n'est pas en relation avec x ce qui viole la condition de réflexivité. (La relation est symétrique, mais la transitivité est aussi compromise.)

Exercice 4. (Graphes, fonctions)

Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$.

- Trouver tous les sous-ensembles de $X \times Y$ qui sont le graphe d'une fonction de X dans Y .
- Combien de ces fonctions sont injectives, surjectives, bijectives ?
- Pour les fonctions injectives, trouver le graphe de la fonction réciproque correspondante.

Sol.:

- a) On a $X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$. Les sous-ensembles recherchés sont

$$G_1 = \{(1, 3), (2, 3)\}, \quad G_2 = \{(1, 3), (2, 4)\}, \quad G_3 = \{(1, 4), (2, 3)\}, \quad G_4 = \{(1, 4), (2, 4)\}.$$

Soit $f_i: X \rightarrow Y$, $i = 1, 2, 3, 4$, la fonction qui a comme graphe G_i . On a par exemple $f_2(1) = 3$ et $f_1(2) = 3$.

- b) Les fonctions f_2 et f_3 sont injectives et surjectives et donc bijectives. Les fonctions f_1 et f_4 ne sont ni injectives ni surjectives (et donc pas bijectives). La réponse est donc : il y a deux fonctions qui sont injectives, surjectives et bijectives.

- c) Seulement les fonctions f_2 et f_3 admettent une fonction réciproque $f_i^{-1}: Y \rightarrow X$, $i = 2, 3$ avec graphe H_i :

$$H_2 = \{(3, 1), (4, 2)\} \quad \text{et} \quad H_3 = \{(3, 2), (4, 1)\}.$$

On a par exemple $f_2^{-1}(3) = 1$ et $f_3^{-1}(3) = 2$.

Remarque concernant la terminologie :

Le sous-ensemble $G = \{(1, 3)\} \subset X \times Y$ est le graphe d'une fonction $f: D \rightarrow Y$ avec domaine de définition $D = \{1\} \subset X$. Dans l'exercice 4 nous ne nous intéressons qu'aux fonctions avec domaine de définition X .

Exercice 5. (V/F : fonctions)

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- $f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow f = g$.
- Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.
- Si $f \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

V	F
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- e) Si $f \circ g$ est injective, alors f est injective. □ □
 f) Si $f \circ g$ est surjective, alors f est surjective. □ □

Sol.:

- a) FAUX.
 Prendre par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ qui satisfont $(f \circ g)(x) = x^2 = (g \circ f)(x)$ avec $f \neq g$.
- b) VRAI.
 Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme f est injective, on a $g(x_1) = g(x_2)$, et par l'injectivité de g , il suit que $x_1 = x_2$. Ainsi $f \circ g$ est bien injective.
- c) VRAI.
 Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Donc on a $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$. Comme $f \circ f$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc f est injective.
- d) VRAI.
 Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. Donc on a $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Comme $f \circ g$ est injective, on conclut que $x_1 = x_2$ et donc g est injective.
- e) FAUX.
 Prendre par exemple $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$ qui sont définies de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Alors f n'est pas injective mais $(f \circ g)(x) = e^{2x}$ est injective.
- f) VRAI.
 Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $f \circ g$ est surjective, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(f \circ g)(x) = y$. En posant $z = g(x)$ on a trouvé un $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = y$. Ainsi f est surjective.

Exercice 6. (Relations)

La relation d'orthogonalité entre deux droites du plan est-elle symétrique? réflexive? transitive?

Sol. :

- La relation n'est pas réflexive : une droite n'est pas orthogonale à elle-même.
- La relation est symétrique : si D est orthogonale à D' , alors D' est orthogonale à D .
- La relation n'est pas transitive : si D est orthogonale à D' et si D' est orthogonale à D'' , alors D et D'' ne sont pas orthogonales (elles sont parallèles ou confondues).

Exercice 7. (Raisonnement par récurrence)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (somme de carrés d'entiers);
- b) $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ (somme alternée de carrés d'entiers);
- c) $(\star) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ (somme de cubes d'entiers).

Calculer $n = \sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2)$.

Sol.:

a) i) Pour $n_0 = 1$ on a

$$1 = \sum_{k=1}^1 k^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 ,$$

et $P(1)$ est donc vraie.

ii) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + (n+1)^2 \stackrel{P(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)((n+2)(2n+3))}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} , \end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

b) i) Pour $n_0 = 1$ on a (avec $(-1)^0 = 1$),

$$1 = \sum_{k=1}^1 (-1)^{1-k} k^2 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 ,$$

et $P(1)$ est donc vraie.

ii) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{n+1-k} k^2 \right) + (n+1)^2 \\ &= - \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k^2 \right) + (n+1)^2 \\ &\stackrel{P(n)}{=} - \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \frac{-n(n+1) + 2(n+1)^2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(-n + 2n + 2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} , \end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

c) i) Pour $n_0 = 1$ on a

$$1 = \sum_{k=1}^1 k^3 = \left(\frac{1}{2} 1 \cdot 2 \right)^2 = 1 ,$$

et $P(1)$ est donc vraie.

ii) Pour $n \geq n_0 = 1$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) + (n+1)^3 \stackrel{P(n)}{=} \left(\frac{1}{2} n(n+1) \right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{2^2} n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{2^2} (n+1)^2 (n^2 + 2^2(n+1)) \\ &= \frac{1}{2^2} (n+1)^2 (n^2 + 4n + 4) = \frac{1}{2^2} (n+1)^2 (n+2)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} (n+1) ((n+1) + 1) \right)^2 \end{aligned}$$

et $P(n)$ implique donc $P(n+1)$ pour $n \geq n_0$.

Pour calculer la dernière somme on utilise les résultats précédents. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{1000} (k+1)(3k+2) &= \sum_{k=1}^{1001} k(3k-1) = 3 \sum_{k=1}^{1001} k^2 - \sum_{k=1}^{1001} k \\ &= 3 \frac{1001 \cdot 1002 \cdot 2003}{6} - \frac{1001 \cdot 1002}{2} = \frac{1001 \cdot 1002}{2} (2003 - 1) \\ &= 1001^2 \cdot 1002 = 1\,004\,005\,002 . \end{aligned}$$

Exercice 8. (Raisonnement par récurrence)

Montrer par récurrence l'**inégalité de Bernoulli** : pour tout entier $n \geq 1$,

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall x \geq -1.$$

Sol.: Soit $P(n)$ la propriété

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall x \geq -1.$$

a) Remarquons que pour $n = 1$, la propriété est vérifiée, puisque

$$(1+x)^1 = 1+1x,$$

qui est vraie pour tout x , donc en particulier pour tout $x \geq -1$.

b) Supposons ensuite que $P(n)$ est vraie. On peut alors écrire, pour tout $x \geq -1$,

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \quad (\text{car } P(n) \text{ est supposé vérifiée et } x \geq -1) \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

Ceci montre que $P(n+1)$ est aussi vérifiée.

Ainsi, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 10. (Négation et quantificateurs)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
2. $(\star) \forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M.$
3. $(\star) \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0.$

Sol. : Pour résoudre cet exercice, il est préférable de comprendre ce que signifie la proposition et ensuite la nier, plutôt que d'essayer d'appliquer des règles abstraites de logique.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
2. $\exists M > 0, \forall A > 0, \exists x \geq A, f(x) \leq M.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $x > 0.$

On verra plus tard que 2. (dans sa version non niée) est la définition de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.