1

Rappel : l'exponentielle complexe

On considère l'extension de e^{ϕ} à $e^{\gamma+i\phi}$ avec $(\gamma,\phi)\in\mathbb{R}^2$.

En utilisant $e^{a+b}=e^a e^b$, on a $\boxed{e^{\gamma+i\phi}=e^{\gamma}e^{i\phi}}$

Preuve : Considérons les fonctions f et g définies par

$$\begin{cases} f(t)=e^{at} \\ g(t)=e^{(a+b)t} \end{cases} \quad \text{avec } (a,b)\in\mathbb{C}^2$$

g vérifie $\quad \dot{g}-(a+b)g=0 \quad$ (1)

f vérifie $\quad \dot{f}-af=0 \quad$ (2)

Cherchons une solu° z de (1) tel que $z(t)=u(t)f(t)$

$$\dot{z}(t)=\dot{u}(t)f(t)+a\,u(t)f(t) \quad (3)$$

$$(1)+(3) \Leftrightarrow \dot{u}(t)f(t)+a\,u(t)f(t)-(a+b)u(t)f(t)=0$$

$$\Leftrightarrow (\dot{u}(t)-b\,u(t))f(t)=0$$

$$\dot{u}(t)=b\,u(t)$$

$$\Rightarrow u(t)=A e^{bt}$$

Comme $g(0)=f(0)=1$, $\quad g(t)=e^{bt}e^{at}$ $\quad$ CQFD

On peut donc se concentrer sur $e^{i\phi}$, e^{γ} agissant comme un préfacteur réel.

On peut montrer : $\boxed{e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi}$

Preuve : Considérons l'équation différentielle

$$\ddot{f}(t)+f(t)=0. \quad (4)$$

C'est une équation différentielle linéaire du second degré. Elle admet donc deux solutions distinctes (i.e. non proportionnelles)

②

D'une part on a

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\cos t = -\sin t \\ \dfrac{d}{dt}\sin t = \cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}\cos t = -\cos t \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\sin t = -\sin t \end{cases}$$

Les solutions de ④ peuvent donc s'écrire comme $f(t) = A\cos t + B\sin t$, A et B constantes réelles ou complexes

D'autre part

$$\frac{d}{dt}e^{\pm it} = \pm i e^{it} \qquad \frac{d^2}{dt^2}e^{\pm it} = (\pm i)^2 e^{it} = -e^{it}$$

Les solutions de ④ peuvent donc aussi s'écrire comme

$$f(t) = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$$

Pour faire un lien avec votre cours de maths

$(t \to \cos t, t \to \sin t)$ et $(t \to e^{it}, t \to e^{-it})$ sont deux bases différentes de l'espace vectoriel de dimension 2 formé par les solutions de ~~[illegible]~~ $\ddot{f} + f = 0$

On peut donc exprimer cos / sin en fonct° de $e^{\pm it}$ et vice versa

Pour cela

$\cos t = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$ $\qquad \boxed{\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos 0 = 1 \to \alpha + \beta = 1 \\ \left(\dfrac{d}{dt}\cos t\right)_{t=0} = 0 \to i(\alpha - \beta) = 0 \end{array}\right\} \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

De même $\qquad \boxed{\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})}$

$e^{it} = A\cos t + B\sin t$

$$\left(\frac{d}{dt}e^{it}\right)_{t=0} = i, \quad e^{i0} = 1 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = i \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{it} = \cos t + i\sin t \\ e^{-it} = \cos t - i\sin t \end{array}}$$