Intégration et systèmes de coordonnées

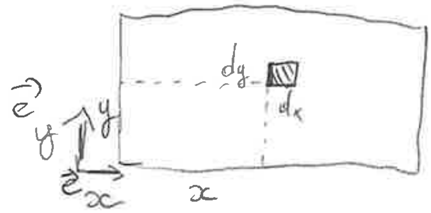
- Dans cette note, nous faisons un bref rappel/exposé des éléments d'intégrations en polaires/cylindriques/sphériques.
- Contexte : • Généralisation de formule du type

$$I = \sum_i m_i d_i^2$$

  • Comment calculer $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ en polaires

- Idée - On veut calculer $\langle f \rangle = \sum m_i f(\vec{r}_i)$ sur un solide continu.

① Coordonnées cartésiennes : faisons explicitement le cas 2D



On découpe notre surface en parties infinitésimales où x varie de x à $x+dx$ et y de y à $y+dy$

La masse de la partie est donnée par

$$m_i \sim \underbrace{\rho(x,y)}_{\text{masse surfacique}} \times \underbrace{dx\,dy}_{\text{surface}}$$

↳ Pour un solide homogène $\rho = \dfrac{M}{A}$ ← aire du solide

$$f(\vec{r}_i) \sim f(x,y)$$

Et donc $\langle f \rangle = \iint_{\text{Solide}} \rho\, f(x,y)\,dx\,dy$

En une dimension, de la même façon on obtiendrait

$$\langle f \rangle = \int_{\text{ligne}} \rho\, f(x)\,dx$$

↳ masse linéaire

En trois dimensions, même raisonnement mais avec des petits parallélépipèdes de volume $dx\,dy\,dz$

$$\langle f \rangle = \iiint \rho\, f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

↳ masse volumique

② Coordonnées polaires et cylindriques

Maintenant nous cherchons à faire varier r de dr et θ de $d\theta$.

L'aire de l'élément minimal est donc approximent $dr \times r d\theta$ (homogène à une longueur au carré).

Sa masse est donc $m_i \simeq \rho(r,\theta)\, r dr d\theta$

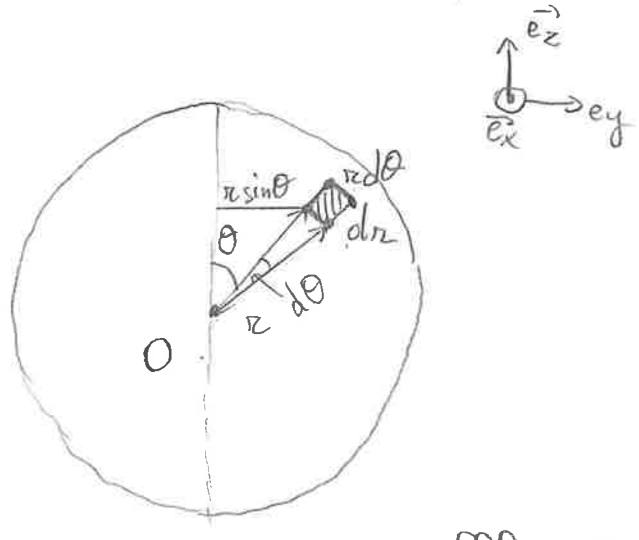
et $\langle f \rangle = \iint_{Solide} \rho\, f(r,\theta)\, \boxed{r dr d\theta}$ → élément d'intégration en polaire

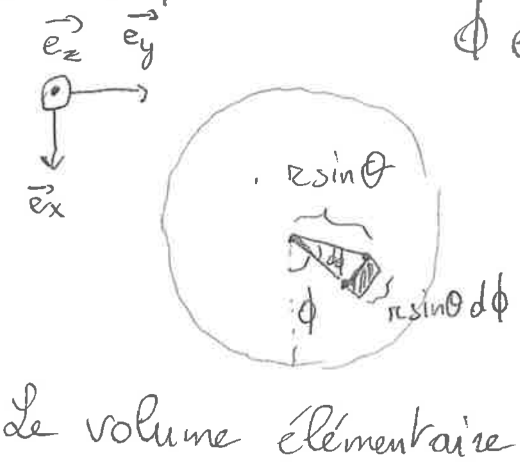
Pour le cas cylindrique le raisonnement est le même

$$\langle f \rangle = \iiint_{Solide} \rho\, f(r,\theta,z)\, \boxed{r dr d\theta dz}$$

③ Coordonnées sphériques

Idem, avec dr, $d\theta$ et $d\phi$. Notation: $\theta \in [0;\pi]$
$\phi \in [0, 2\pi]$





Le volume élémentaire est $dr \times r d\theta \times r\sin\theta\, d\phi$

$$\langle f \rangle = \iiint \rho f(\ )\, \boxed{r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\phi}$$

Vérifions : le volume d'une sphère est

$$\iiint_{Sphère} dx dy dz = \iiint_{Sphère} \sin\theta\, r^2\, dr d\theta d\phi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3 \checkmark$$