Rappel : les nombres complexes

- Conceptuellement : $\begin{cases} x^2 = 1 & \text{a deux solutions } \pm 1 \\ x^2 = -1 & \text{n'en a pas} \end{cases}$

pose un problème de symétrie. Imaginons qu'il existe un nombre imaginaire i tq

$$\boxed{i^2 = -1}$$

On veut pouvoir résoudre $x^2 = -n \quad n \in \mathbb{R}^+$

Cela veut dire qu'on peut multiplier i par des nombres réels.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2 = -1$$

$$\boxed{x = i\sqrt{n}}$$

On peut donc le multiplier par -1.

On a alors $(-i)^2 = (-1)^2 (i)^2 = -1$

et donc l'équat° $x^2 = -1$ a bien deux soluti°, comme $x^2 = 1$. La symétrie est restorée

$$\boxed{x^2 = -1 \iff x = \pm i}$$

- On peut généraliser cette approche à des polynomes du second degré arbitraire. En particulier

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$, 2 soluti° $x_\pm = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

Preuve

$$a x^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Si $\Delta < 0$, on a donc maintenant deux soluti°

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

En notation "impropre", on a donc

$$\boxed{x_\pm = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \forall \Delta}$$

Il nous faut donc considérer les nombres de la forme $\boxed{z = a + ib \quad , \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2}$

On appelle ces nombres des $\boxed{\text{complexes}}$. On note leur ensemble $\boxed{\mathbb{C}}$

Quelques propriétés

On note $\left| \begin{array}{l} z_1 = a_1 + ib_1 \\ z_2 = a_2 + ib_2 \end{array} \right.$

- Opérations

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}$$

$$z_1 \times z_2 = a_1 \cdot a_2 + ib_1 \times a_2 + ib_1 \times a_1 + ib_1 \times ib_2$$

$$\boxed{z_1 \times z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)}$$

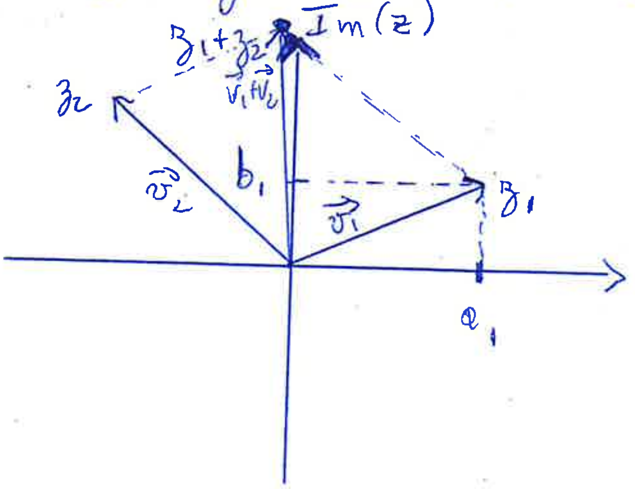
- Représentation

$z = a + ib$ a deux composantes réelles.

On peut donc les représenter dans le plan. On appelle souvent cette représentation "le plan complexe"

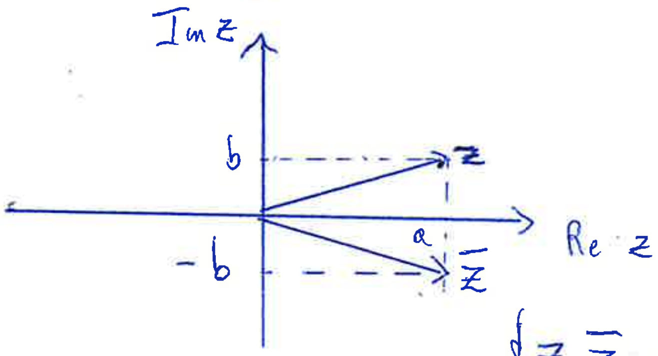
$$z = a + ib \iff \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$z_1 + z_2 \iff \vec{v_1} + \vec{v_2}$$



L'addition des nombres complexes est équivalente à l'addition des vecteurs de $\mathbb{R}^2$

* Complexes conjugués et normes



- On appelle complexe conjugué de z le nombre
$$\bar{z} = a - ib$$
- Il vérifie
$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = \|\vec{v}\|^2$$

On appelle $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \|\vec{v}\|$ la $\boxed{\text{norme}}$ ou le $\boxed{\text{module}}$ de z

* Représentatiº ~~comple~~ exponentielle

Au lieu de paramétrer $z = a+ib$, on peut utiliser une représentatiº polaire / trigonométrique où

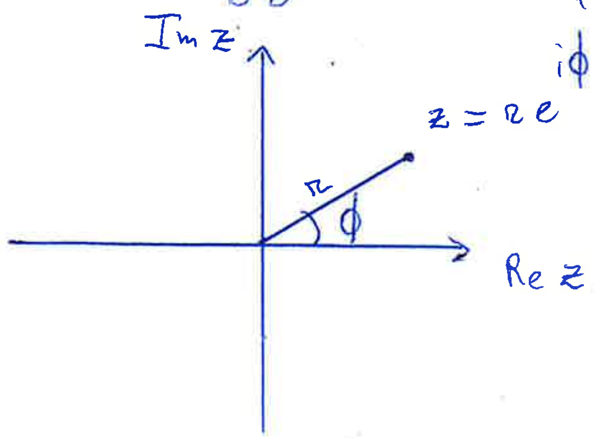
$$z = re^{i\phi} \quad \text{avec} \quad \cdot\ r \in \mathbb{R}^{+*} \ (r \geq 0)$$
$$\cdot\ \phi \in [0, 2\pi[\ \text{ou} \ ]-\pi, \pi] \quad | \text{ convention}$$

$$\boxed{e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi} \quad \text{vérifie} \quad e^{i(\phi+2\pi)} = e^{i\phi}$$

voir autre note pour une preuve

Par construction, si $z = re^{i\phi}$, $\bar{z} = re^{-i\phi}$

et $z\bar{z} = r^2 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} r \text{ est le module de } z \\ \phi \text{ est l'angle avec l'axe réel} \end{array}}$



Quelques notes

- Pour $z = 0$, ϕ n'est pas défini
$0\,e^{i\phi} = 0 \quad \forall\phi$
- Pour $z \neq 0$, la représentatiº $re^{i\phi}$ est unique hors $\phi \to \phi + 2n\pi \quad n \in \mathbb{N}$
- $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$
- $-1 = e^{i\pi}$

Pour terminer, quelques propriétés que vous prouverez en maths

Important

- Un polynome de degré n admet toujours n racines complexes, comptées ~~par~~ avec leur multiplicités.

  i.e $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots + a_0 = a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$

  où les z_i ne sont pas forcément distincts.

Secondaires

- De même qu'on peut travailler avec des espaces vectoriels réels, on peut travailler avec des espaces vectoriels complexes.

- Pour l'instant, vous pouvez voir "i" comme un outil de calcul qui simplifie le traitement des systèmes oscillants ou périodiques. Cependant, en regardant les matrices, on peut construire des espaces qui ont exactement une ~~...~~ algèbre complexe.

  e.g : $\mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$V = \{ M \mid M = a\,\mathbb{1} + b\,I \}$ vérifie la même algèbre que les nombres complexes