Analyse I – Série 3

Remarque générale.
Pour les exercices de type Vrai ou Faux (V/F), répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie.

Valeur absolue. La (fonction) valeur absolue, notée $|\cdot|$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0, \\ -x & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

Echauffement 1. (Inégalité triangulaire) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \text{et} \qquad |x+y| \geq \Big||x| - |y|\Big|$$

Sol.

— *En utilisant la propriété $x \cdot y \leq |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, on obtient*

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot x \cdot y \leq |x|^2 + |y|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2.$$

Par conséquent, $|x+y| \leq |x| + |y|$. (Une autre approche pour résoudre cet exercice consiste à étudier les différents cas possibles pour les signes de x, y et $x+y$).

— *En utilisant l'inégalité triangulaire (l'inégalité montrée ci-dessus) on a d'une part*

$$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y| \Rightarrow |x+y| \geq |x| - |y|,$$

et d'autre part

$$|y| = |y+x-x| \leq |y+x| + |x| \Rightarrow |x+y| \geq |y| - |x|.$$

Il s'ensuit $|x+y| \geq \Big||x| - |y|\Big|$.

Exercice 1. (Nombres irrationnels)

Démontrer que les nombres réels r suivants sont irrationnels

a) $r = \sqrt{3}$ b) $(*)$ $r = \sqrt{7 + \sqrt{17}}$ c) $(*)$ $r = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Sol.:

a) On raisonne par l'absurde. Supposons que $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ *avec* p, q *des entiers naturels tels que* $\text{pgcd}(p,q) = 1$. *Il s'ensuit que* $p^2 = 3q^2$, *c.-à-d. que* p^2 *est donc un multiple de* 3, *ce qui n'est possible que si* p *est un multiple de* 3. *On a donc* $p = 3a$ *pour un entier naturel* a. *Par conséquent,* $3^2a^2 = 3q^2$ *et donc* $q^2 = 3a^2$. *Ainsi* q^2 *est un multiple de* 3, *ce qui n'est possible que si* q *est un multiple de* 3. *Mais ceci implique que le plus grand commun diviseur de* p *et de* q *n'est pas égal à* 1, *ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ. Donc* $\sqrt{3}$ *est irrationnel.*

b) On a

$$r^2 = 7 + \sqrt{17} \ ,$$

ou

$$\sqrt{17} = r^2 - 7 \ .$$

Si r *est un nombre rationnel, il s'en suit que* $r^2 - 7$ *en est aussi un et donc* $\sqrt{17}$ *aussi, ce qui est une contradiction. (La preuve que* $\sqrt{17}$ *est un nombre irrationnel se fait comme pour* $r = 2$ *ou* 3 *ou tout autre nombre premier, cf. i.) Donc* $r = \sqrt{7 + \sqrt{17}}$ *est irrationnel.*

c) On a

$$\left(r - \sqrt{2}\right)^3 = 3 \ ,$$

et donc

$$r^3 - 3r^2\sqrt{2} + 3r \cdot 2 - 2\sqrt{2} - 3 = 0 \ ,$$

d'où on obtient

$$\sqrt{2} = \frac{r^3 + 6r - 3}{3r^2 + 2} \ .$$

Cette égalité implique que $\sqrt{2}$ *est un nombre rationnel si* r *est un nombre rationnel, ce qui est une contradiction. Donc* r *est irrationnel.*

Exercice 2. (Intervalles)

Récrire les ensembles A suivants en utilisant la notation des intervalles :

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$ b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$ c) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x \leq 1\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$ e) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 2\}$ f) $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^3 \geq 3\}$

Sol.:

a) $A = \left]-\infty, 1\right[$ *b)* $A = \left]-\infty, 1\right]$

c) $A = \left[-1, \infty\right[$ *d)* $A = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

e) $A = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right[$ *f)* $A = \left]-\infty, -\sqrt[3]{3}\right]$

Exercice 3. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Pour chaque ensemble, étudier s'il est majoré ou minoré dans $\mathbb{R}$. Si l'ensemble est majoré, trouver son supremum et s'il est minoré, trouver son infimum. Dans chaque cas, étudier si le supremum (l'infimum) appartient à l'ensemble.

a) $A =]-1, \sqrt{2}]$

b) $B =]\sqrt{2}, \infty[$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x-1| \leq 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$

e) $E = \mathbb{Q}$

f) $F = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$

Sol.:

a) $\operatorname{Sup} A = \sqrt{2} \in A$, $\operatorname{Inf} A = -1 \notin A$ *(voir les notes du cours).*

b) *B n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$,* $\operatorname{Inf} B = \sqrt{2} \notin B$.

c) *Soit $x \in C$, alors $|2x-1| \leq 1$, ce qui équivaut à $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$, soit encore $0 \leq x \leq 1$. Par conséquent, 0 est le plus grand minorant de C, et 1 est le plus petit majorant de C.* $\operatorname{Sup} C = 1 \in C$, $\operatorname{Inf} C = 0 \in C$.

d) *De la même manière qu'à la question précédente, $|x^2 - 2| < 1$ équivaut à $-1 < x^2 - 2 < 1$, soit $1 < x^2 < 3$. Pour les solutions positives, on peut passer à la racine carrée (comme la fonction racine carrée est croissante, l'ordre des inégalités est gardé) et obtenir $1 < x < \sqrt{3}$. Pour les solutions négatives ($x < 0$), le même raisonnement peut être appliqué à $-x$ et conduit à $1 < -x < \sqrt{3}$, soit $-\sqrt{3} < x < -1$. Par conséquent, $D = \left]-\sqrt{3}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{3}\right[$, donc* $\operatorname{Sup} D = \sqrt{3} \notin D$, $\operatorname{Inf} D = -\sqrt{3} \notin D$.

e) *G n'est ni majoré ni minoré puisqu'il contient l'ensemble des entiers relatifs.*

f) $\operatorname{Sup} I = 1 \notin I$, $\operatorname{Inf} I = 0 \notin I$.

Exercice 4. (Rationnels, irrationnels)

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

		V	F
a)	La somme de deux rationnels est rationnelle.	☐	☐
b)	La somme de deux irrationnels est irrationnelle.	☐	☐
c)	La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnelle.	☐	☐
d)	Le produit de deux rationnels est rationnel.	☐	☐
e)	Le produit de deux irrationnels est irrationnel.	☐	☐
f)	Le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est rationnel.	☐	☐

Sol.:

a) *C'est vrai, en effet $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$. Cela est vrai pour la différence aussi.*

b) *C'est faux. Par exemple $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme est rationnelle.*

c) *C'est faux. En effet si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors si $a + b \in \mathbb{Q}$ on aurait $b = (a+b) - a \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.*

d) *Vrai car $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$*

e) *C'est faux, par exemple $a = \sqrt{2} = b$ sont irrationnels, mais $ab = 2$ ne l'est pas.*

f) Faux. Prendre par exemple $a = 1$ *et* $b = \sqrt{2}$.

Exercice 5. (Sous-ensembles de $\mathbb{R}$)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

	V	F
a) Si $\operatorname{Sup} A \in A$ et $\operatorname{Inf} A \in A$, alors A est un intervalle fermé.	☐	☐
b) Si A est un intervalle fermé et borné, alors $\operatorname{Sup} A \in A$ et $\operatorname{Inf} A \in A$.	☐	☐
c) Si $\operatorname{Sup} A \in A$ et $\operatorname{Inf} A \notin A$, alors A est un intervalle semi-ouvert.	☐	☐
d) Si $\operatorname{Sup} A = \operatorname{Inf} A$, alors A est un point.	☐	☐
e) Si A est minoré, alors $\operatorname{Inf} A \notin A$.	☐	☐
f) Si A est majoré, alors $\max A$ existe.	☐	☐

Sol.:

a) FAUX.
Prendre par exemple $A = [0, 1[\cup]1, 2]$. *La proposition serait vraie pour un intervalle.*

b) VRAI.
Prenons un intervalle fermé et borné $I = [a, b]$. *Alors* $a = \operatorname{Inf} I$ *et* $b = \operatorname{Sup} I$, *ce qui est facile a vérifier à partir de la définition de* Inf *et* Sup *d'un sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *(voir les notes du cours 28.09.2016). Donc on a* $a = \operatorname{Inf} I \in I$ *et* $b = \operatorname{Sup} I \in I$.

c) FAUX.
Prenons $A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$. *On a bien* $A \subset \mathbb{R}$ *ainsi que* $\operatorname{Sup} A \in A$ *et* $\operatorname{Inf} A \notin A$ *mais* A *n'est pas un intervalle semi-ouvert, c'est un ensemble de rationnels.*

d) VRAI.
Par définition des bornes inférieures et supérieures, A *est non vide. De plus* $\operatorname{Sup} A$ *et* $\operatorname{Inf} A$ *sont par définition respectivement un majorant et un minorant de* A. *Ainsi, en notant* $M = \operatorname{Sup} A = \operatorname{Inf} A$ *on a* $\forall x \in A, M \leq x \leq M$. *On en déduit que* $A = \{M\}$ *et donc que* A *est un point.*

e) FAUX.
Contre-exemple : $A = \{0\}$.

f) FAUX.
Contre-exemple : $A = [0, 1[$.

Exercice 6. (Ecart)(*) Soit A une partie non-vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B = \{|x - y| : (x, y) \in A^2\}$.

1. Justifier que B est majoré.

2. Prouver que $\operatorname{Sup} B = \operatorname{Sup}(A) - \operatorname{Inf}(A)$.

Sol.

1. *Soient* $(x, y) \in A^2$ *et soit* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \in A \Rightarrow |x| \leq M$. *Alors on a*

$$|x - y| \leq |x| + |y| \leq 2M,$$

ce qui prouve que B *est majoré.*

2. *Posong* $m = \text{Inf}\, A$ *et* $M = \text{Sup}\, A$. *Soient* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *Alors on a*

$$m \leq x \leq M \text{ et } -M \leq -y \leq -m \Rightarrow -(M - m) \leq x - y \leq M - m$$

d'où l'on tire $|x - y| \leq M - m$. *On en déduit donc que* $M - m$ *est un majorant de* B *et que* $\text{Sup}\, B \leq M - m$. *Pour prouver l'autre inégalité, on fixe* $\varepsilon > 0$ *et on construit un élément* $b \in B$ *tel que* $b > M - m - \varepsilon$. *Pour cela, on sait qu'il existe* $(x, y) \in A^2$ *tel que*

$$x \geq M - \varepsilon/2 \text{ et } y \leq m + \varepsilon/2.$$

Alors $x - y \geq M - m - \varepsilon$, *ce qui est le résultat voulu. On a bien* $\text{Sup}\, B = \text{Sup}\, A - \text{Inf}\, A$.

Exercice 7. (Intervalles)

Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ci-dessous, essayer de les exprimer en termes de réunions ou d'intersections d'intervalles (ouverts, fermés ou non)

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| < 1000\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 100\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 = 27\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 33\}$.

e) $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

f) $G = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - 4| < 7\}$.

g) $H = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 1\}$.

h) $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 1\}$

i) $J = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x \leq 1\}$.

j) $K = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 2\}$

k) $L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \geq 2\}$.

l) $M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -x^3 \geq 3\}$

Sol.:

a) $A =]-1000, 1000[$.

b) $B =]-\infty, -10] \bigcup [10, +\infty[$.

c) $C = [3, 3] = \{3\}$.

d) $D =]-\infty, 33[\bigcup]33, +\infty[$.

e) $E = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}}]i, i + 1[$

f) $G =]-3, 11[$.

g) $H =]-\infty, 1[$

h) $I =]-\infty, 1]$

i) $J = [-1, \infty[$

j) $K = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

k) $L = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \infty\right[$

l) $M = \left]-\infty, -\sqrt[3]{3}\right]$

Exercice 8. (Valeur absolue) Soient x et y deux nombres réels. Démontrer que

$$\max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) \qquad \text{et} \qquad \min\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Sol.

On va séparer deux cas :

- *Si $x \geq y$, alors $x-y \geq 0$ et donc $|x-y| = x-y$. On a aussi $\max\{x,y\} = x$ et*

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x.$$

- *Si $x < y$, alors $|x-y| = y-x$ et $\max\{x,y\} = y$. Dans ce cas*

$$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+y-x) = y.$$

Dans les deux cas, on a bien démontré la relation demandée. La démonstration pour le minimum est exactement similaire.

Exercice 9. (Existence de $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$) Soit $A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \text{ et } x^2 < 2\}$. Montrer que A admet un supremum dans $\mathbb{R}$, noté $a = \operatorname{Sup} A$, et qu'il satisfait $a \geq 0$ et $a^2 = 2$ (c'est à dire $\operatorname{Sup} A = \sqrt{2}$). Indication : pour montrer $a^2 = 2$, on pourra montrer par l'absurde que $a^2 \geq 2$ et puis que $a^2 \leq 2$.

Sol.

A est non vide (par exemple $1 \in A$) et majoré (par exemple 2 est un majorant) donc A admet un supremum $a = \operatorname{Sup} A$, par le théorème du cours. Comme $1 \in A$, on a $a \geq 1$. Montrons maintenant, par un raisonnement par contradiction, que $a^2 \geq 2$, puis que $a^2 \leq 2$.

- *Supposons, par contradiction, que $a^2 < 2$. On veut montrer que si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors $(a+\varepsilon)^2 < 2$ ce qui impliquerait $a+\varepsilon \in A$ et donc $a \neq \operatorname{Sup} A$. Pour ce faire, remarquons que pour $\varepsilon < 1$, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 \leq a^2 + 3a\varepsilon$$

où la dernière inégalité vient du fait que $a \geq 1$. Choisissons $\varepsilon < (2-a^2)/3a$ (ce qui est possible puisque l'on suppose $a^2 < 2$). Alors

$$(a+\varepsilon)^2 < a^2 + 3a\frac{2-a^2}{3a} = 2.$$

Donc on a $a+\varepsilon \in A$ ce qui est une contradiction puisque $a = \operatorname{Sup} A$. Donc $a^2 \geq 2$.

- *Supposons, par contradiction, que $a^2 > 2$. Par la propriété du supremum vue en cours, on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ tel que } x \geq a - \varepsilon.$$

En particulier on a

$$x^2 \geq x(a-\varepsilon) \geq (a-\varepsilon)^2.$$

Mais pour le choix $\varepsilon = (a^2-2)/3a$ (ce qui est possible puisque l'on suppose $a^2 > 2$), on a $(a-\varepsilon)^2 \geq a^2 - 3a\varepsilon = 2$. On a donc $x^2 \geq 2$ ce qui est une contradiction puisque $x \in A$. Donc $a^2 \leq 2$.

- *En conclusion, on a $a^2 \geq 2$ et $a^2 \leq 2$ donc $a^2 = 2$.*