On définit $\sim$ par $0,999\ldots \sim 1,000\ldots$

$0,25999\ldots \sim 0,26000\ldots$

On peut voir $\mathbb{R}$ comme $V/\sim$ (il faut aussi définir $+, \cdot, \pi, \ldots$)

## 1.1 Supremum / Infimum / Maximum / Minimum

Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ (qui le distingue de $\mathbb{Q}$) :

"Tout ensemble non vide de $\mathbb{R}$ minoré admet un plus grand minorant dans $\mathbb{R}$."

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ ($A$ sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$).

- Minimum : S'il existe $m \in A$ tel que $\forall x \in A$, $m \leqslant x$, on dit que $m$ est le minimum de $A$.
- Maximum : S'il existe $M \in A$ tel que $\forall x \in A$, $M \geqslant x$ on dit que $M$ est le maximum de $A$.

Exemple : Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \,;\, 0 < x \leqslant 1\}$

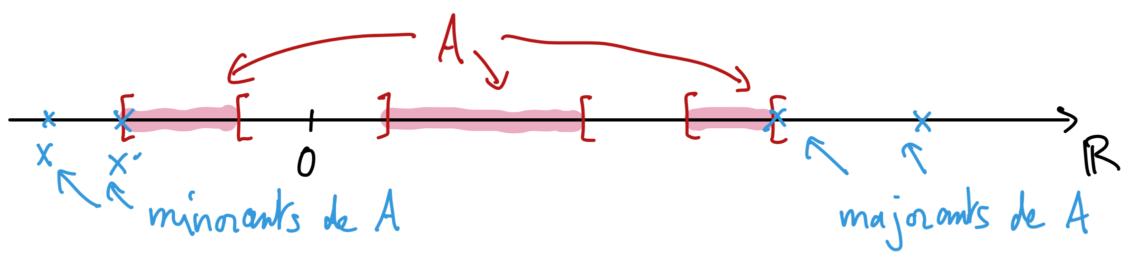
- $A$ admet un maximum $1$ ($1 \in A$)
- $A$ n'admet pas de minimum

fin cours 02/10

En effet, $\forall x \in A$, $\frac{x}{2} \in A$ et $\frac{x}{2} < x$ donc $x$ n'est pas le minimum de $A$.

Remarque : s'il existe, le minimum (resp. maximum) est unique.

- Minorant : $x$ est un minorant de $A$ si $\forall a \in A$, on a $x \leqslant a$.
- Majorant : $x$ —— majorant —— ——, on a $x \geqslant a$.



- **Minoré** : A est minoré s'il existe un minorant
  (c-à-d. si $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall a \in A$, $x \leq a$ )
- **Majoré** : A est majoré s'il existe un majorant
- **Borné** : A est borné si A est à la fois majoré et minoré

**Exemple** : $A = \{ x \in \mathbb{R} \ ; \ x > 0 \text{ et } 1/x < 1 \}$

$$( x > 0 \text{ et } 1/x < 1 ) \Leftrightarrow ( x > 1 )$$

Donc $A = \{ x \in \mathbb{R} \ ; \ x > 1 \}$ → n'est pas majoré
→ est minoré ( 1 est un minorant)
aussi $-1$, $1/2$, $0$, etc

**Infimum** (ou borne inférieure) de A : c'est le plus grand minorant de A.
Il est noté Inf A.

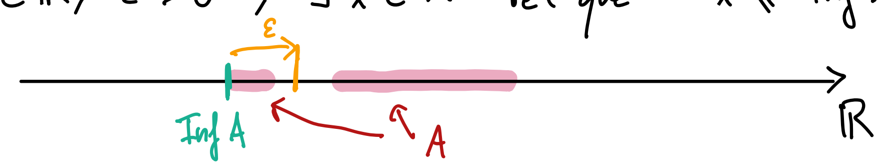
| |
|---|
| **Thm** (admis). Tout sous-ensemble non vide minoré de $\mathbb{R}$ admet un infimum dans $\mathbb{R}$. |

**Exemple** : $A = \{ x \in \mathbb{R} \ ; \ x > 0 \text{ et } x^2 > 2 \}$
A est minoré, est non-vide donc A admet un infimum.

**Exercice** : montrer que $\begin{cases} \text{Inf } A \geq 0 \\ (\text{Inf } A)^2 = 2 \end{cases}$

**Propriétés de l'infimum** :

- $\forall x \in A$, $\text{Inf } A \leq x$ ( l'inf. est un minorant).
- $\forall b \in \mathbb{R}$, $b$ minorant de A, on a $b \leq \text{Inf } A$
- (*) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tel que $x \leq \text{Inf } A + \varepsilon$.



Montrons (*) par contraposition :

Supposons que $a \in \mathbb{R}$ satisfait non (*), c'est à dire :

$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in A,\quad x > a + \varepsilon$

cela implique que $a+\varepsilon$ est un minorant de $A$, et $a+\varepsilon > a$ donc $a$ n'est pas l'infimum

[ Rappel : $\big(\text{non } (*) \Rightarrow a \neq \operatorname{Inf} A\big) \Leftrightarrow \big(a = \operatorname{Inf} A \Rightarrow (*)\big)$ ]

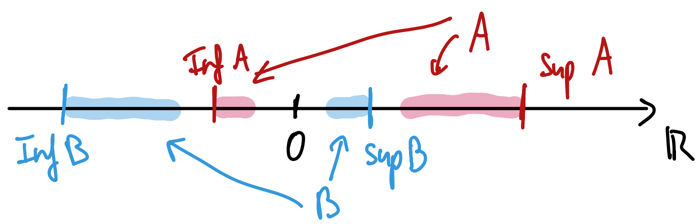
De manière analogue :

- Déf : le supremum de $A$, noté $\sup A$, est le plus petit des majorants de $A$ (s'il existe).

Thm : Tout sous-ensemble non-vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet un supremum

Lien entre inf et sup : soit $B = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ -x \in A\}$.

alors : $\begin{cases} \operatorname{Inf} B = -\operatorname{Sup} A \\ \operatorname{Sup} B = -\operatorname{Inf} A \end{cases}$



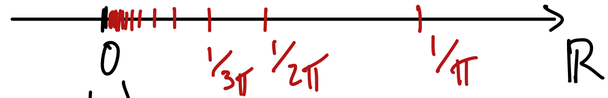

Propriétés :
- $\forall x \in A, \qquad \operatorname{Sup} A \geqslant x$
- $\forall b \in \mathbb{R}$, $b$ majorant de $A$, on a $\quad b \geqslant \operatorname{Sup} A$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in A$ tel que $\quad x \geqslant \operatorname{Sup} A - \varepsilon$

Convention :
- Si $A$ n'est pas minoré, on écrit $\operatorname{Inf} A = -\infty$.
- Si $A$ n'est pas majoré, on écrit $\operatorname{Sup} A = +\infty$.

Exemple : $A = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x > 0 \text{ et } \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$

$$\left(x > 0 \text{ et } \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0\right) \Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ et } \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \tfrac{1}{x} = k\pi\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists\, k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \tfrac{1}{x} = k\pi\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists\, k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x = \tfrac{1}{k\pi}\right)$$

Donc $A = \left\{ \frac{1}{k\pi} \,;\, k \in \mathbb{N}^* \right\}$




- On a $A$ majoré (par exemple 2 est un majorant).
  $\sup A = \frac{1}{\pi} = \max A$

- On a $A$ minoré (par exemple $-1$, $0$ sont des minorants).
  $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varepsilon > \frac{1}{k\pi}$. donc $\varepsilon$ n'est pas un minorant.
  Donc $0$ est le plus grand des minorants, c-à-d. $\inf A = 0$.

Remarque : $0 \notin A$ donc $A$ n'admet pas de minimum.

## 1.2 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \geqslant 0\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x > 0\}$

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leqslant 0\}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x < 0\}$

Intervalle : ensemble des points entre 2 bornes. Soit $a \leqslant b$ :

$]a, b[ \;= \{x \in \mathbb{R} \,;\, a < x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leqslant x \leqslant b\}$

$[a, b[ \;= \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leqslant x < b\}$

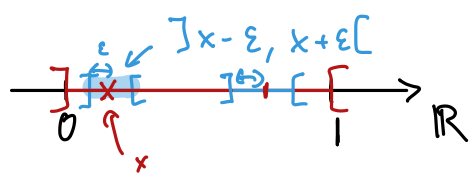
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \leqslant b\}$

$]a, +\infty[ \;= \{x \in \mathbb{R} \,;\, x > a\}$, etc.

Remarque : $]a, a[ \;= \emptyset$ et $[a, a] = \{a\}$.

Définition : • $A \subset \mathbb{R}$ est appelé ouvert si $\forall x \in A$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \;\subset A$.
• $A \subset \mathbb{R}$ est appelé fermé si $\mathbb{R} \setminus A$ est ouvert.

Exemple : $A = \,]0, 1[$ est ouvert



Preuve : Soit $x \in A$.

- si $x \leq 1/2$ : On prend $\varepsilon = \frac{x}{2}$ car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ = ]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}[ \subset ]0,1[$
- si $x > 1/2$ : On prend $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$ car $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ = ]\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}, \frac{x}{2}+\frac{1}{2}[ \subset ]0,1[$

Autres exemples : ouverts : $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $]-3,\sqrt{2}[ \cup ]2,\pi[$, $\mathbb{R}^*$

fermés : $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\{0\}$, $\{3\} \cup [5,7]$

Remarque : $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont les seuls ensembles ouverts et fermés à la fois.

Question : $A = \{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}^*\}$ ouvert ou fermé ?

- $\frac{1}{\pi} \in A$ et $\forall \varepsilon > 0$, $]\frac{1}{\pi}-\varepsilon, \frac{1}{\pi}+\varepsilon[ \not\subset A$

  donc A n'est pas ouvert.
- $0 \in \mathbb{R} \setminus A$ mais $\varepsilon > 0$, $]-\varepsilon, \varepsilon[ \not\subset \mathbb{R} \setminus A$

  car $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k\pi} < \varepsilon$ et donc $\frac{1}{k\pi} \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$.

  donc $\mathbb{R} \setminus A$ n'est pas ouvert donc A n'est pas fermé. fin cours 05/10
- A est ni ouvert ni fermé.