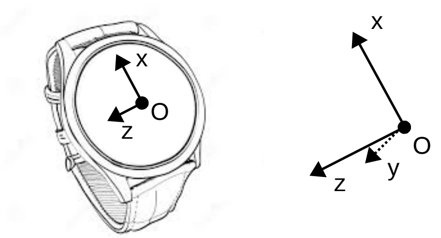
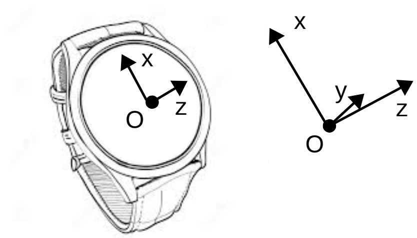
Corrigé Série 04 : Oscillations et systèmes de coordonnées

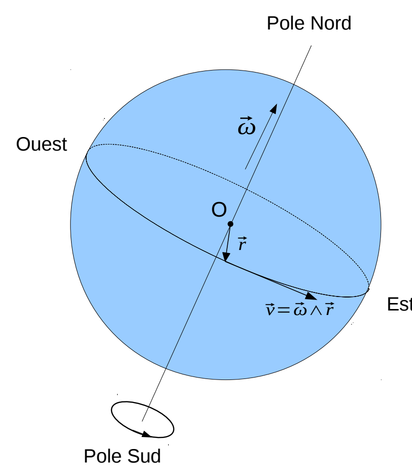
Questions conceptuelles

a) Pour former un repère orthonormé droit $Oxyz$ avec les axes x et z, l'axe y doit être perpendiculaire aux deux axes x et z. Il est donc perpendiculaire au plan du cadran de la montre. A 9h, l'axe y est dirigé vers l'arrière de la montre, alors qu'à 15h il est dirigé vers l'avant de la montre. On peut déterminer cela en utilisant la règle de la main droite.





b) Puisque le soleil apparait à l'est et se couche à l'ouest, la terre tourne d'ouest en est (cf. $\vec{v}$ sur le schéma). Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est défini tel que : $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. La direction de $\vec{\omega}$ est parallèle à l'axe de rotation de la terre, et son sens le sens de rotation de la terre. En utilisant la règle de la main droite, on obtient un vecteur de vitesse angulaire dirigé du pôle sud au pôle nord.



c) Un point du bord du disque tournant à une vitesse angulaire constante ω a une accélération radiale $a_r = r\omega^2$, où r est le rayon du disque. Son accélération tangentielle est nulle.
Si la vitesse angulaire augmente de façon uniforme, un point du bord a une accélération à la fois radiale et tangentielle, notées a_r et a_t respectivement. Puisque la vitesse angulaire augmente uniformément, l'accélération angulaire α est constante et on a :

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0 \,, \tag{1}$$

où ω_0 est la vitesse angulaire initiale. Dans ce cas, les normes des accélérations radiale et tangentielle sont :

$$a_r(t) = r\omega^2(t) = r(\alpha t + \omega_0)^2 \,, \tag{2}$$

et

$$a_t = r\alpha, \tag{3}$$

où a_r et a_t sont les normes des composantes radiale, ρ, et azimutale, ϕ, de l'accélération exprimée dans un repère en coordonnées cylindriques : $\vec{a} = -r\omega^2\hat{e}_\rho + r\alpha\hat{e}_\phi$, où l'on a tenu compte des contraintes $\rho = r =$ constante, $z = 0 =$ constante.
Ces deux normes ne peuvent être égales qu'à un certain instant satisfaisant à :

$$\omega(t) = \sqrt{\alpha}\,, \tag{4}$$

c'est-à-dire :

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\omega_0}{\alpha}. \tag{5}$$

Cette solution existe seulement si $t \geq 0$ donc si $\sqrt{\alpha} \geq \omega_0$, autrement dit si la vitesse angulaire initiale ne dépasse pas la racine de l'accélération angulaire.

1 Changement de repère et systèmes de coordonnées

a) Dans le repère $Oxyz$, notre vecteur s'écrit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{Oxyz} = v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}$.
Comme il a été vu au cours, la composante d'un vecteur $\vec{a}$ selon un axe u se trouve en utilisant le produit scalaire entre $\vec{a}$ et le vecteur unitaire $\hat{u}$: $a_u = (\vec{a} \cdot \hat{u})\hat{u}$.
La coordonnée du vecteur $\vec{v}$ sur l'axe Ox' vaut :
$v_1' = \vec{v} \cdot \hat{x}' = (v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}) \cdot \hat{x}' = v_1(\hat{x} \cdot \hat{x}') + v_2(\hat{y} \cdot \hat{x}') + v_3(\hat{z} \cdot \hat{x}')$.
La coordonnée du vecteur $\vec{v}$ sur l'axe Oy' vaut :
$v_2' = \vec{v} \cdot \hat{y}' = (v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}) \cdot \hat{y}' = v_1(\hat{x} \cdot \hat{y}') + v_2(\hat{y} \cdot \hat{y}') + v_3(\hat{z} \cdot \hat{y}')$.
La coordonnée du vecteur $\vec{v}$ sur l'axe Oz' vaut :
$v_3' = \vec{v} \cdot \hat{z}' = (v_1\hat{x} + v_2\hat{y} + v_3\hat{z}) \cdot \hat{z}' = v_1(\hat{x} \cdot \hat{z}') + v_2(\hat{y} \cdot \hat{z}') + v_3(\hat{z} \cdot \hat{z}')$.

Calculons $\hat{x} \cdot \hat{x}'$: on utilise la définition du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$ où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Dans notre cas, l'angle entre $\hat{x}$ et $\hat{x}'$ vaut θ (voir les deux figures ci-dessous). Les vecteurs unitaires étant par définition de norme 1, le produit scalaire s'écrit

$$\hat{x} \cdot \hat{x}' = \cos\theta.$$

De la même manière, on trouve

$$\hat{y} \cdot \hat{y}' = \cos\theta \quad , \quad \hat{x} \cdot \hat{y}' = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta \quad \text{et} \quad \hat{y} \cdot \hat{x}' = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul. Le vecteur $\hat{z} = \hat{z}'$ est orthogonal à $\hat{x}$, $\hat{x}'$, $\hat{y}$ et $\hat{y}'$. Tous les autres produits scalaires sont donc nuls, sauf le terme $\hat{z} \cdot \hat{z}'$ qui vaut 1.

Dans le repère $Ox'y'z'$, le vecteur $\vec{v}$ s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}_{Ox'y'z'} = \begin{pmatrix} v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta \\ -v_1 \sin\theta + v_2 \cos\theta \\ v_3 \end{pmatrix}$$

ou, sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

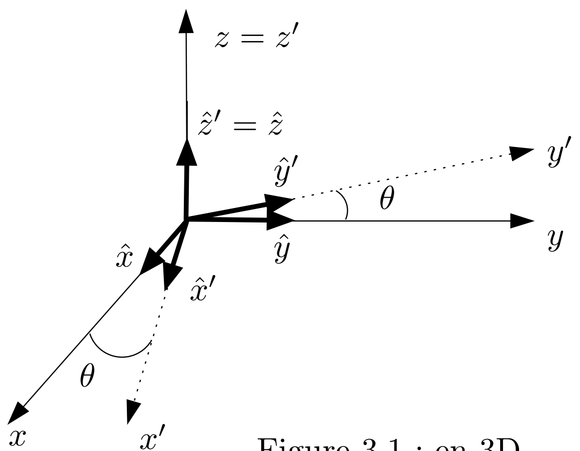


Figure 3.1 : en 3D

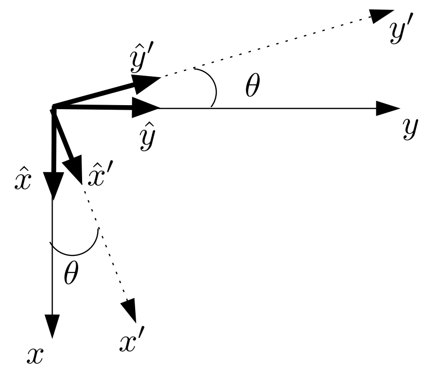


Figure 3.2 : en 2D, dans le plan Oxy

b) La projection du vecteur $\vec{OP}$ sur les axes cartésiens en fonction des paramètres des coordonnées cylindriques (Fig. 3.3) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\phi \\ \rho \sin\phi \\ z \end{pmatrix},$$

où $\rho = \sqrt{r^2 - z^2}$.

La projection du vecteur $\vec{OP}$ sur les axes cartésiens en fonction des paramètres des coordonnées sphériques (Fig. 3.4) s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}.$$

où l'on a introduit dans les coordonnées précédentes l'expression de la longueur ρ : $\rho = r \sin\theta$.

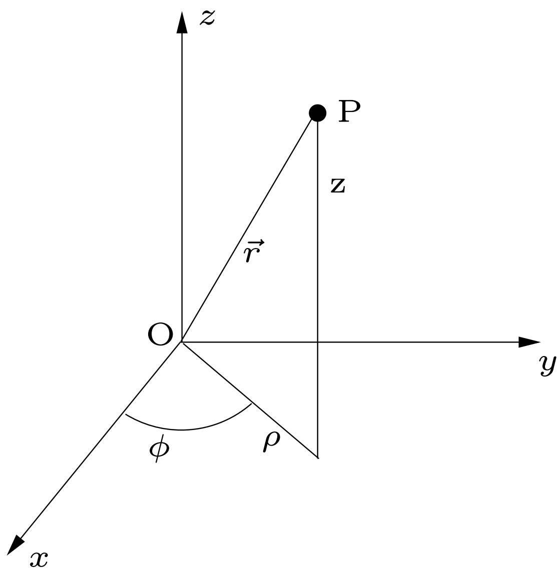


Figure 3.3

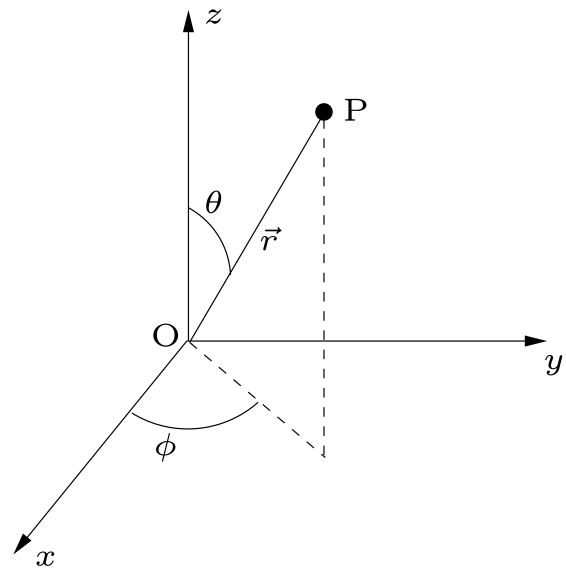


Figure 3.4

c) — L'équation d'une sphère en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

On peut récrire cette équation en coordonnées cylindriques et sphériques en remplacant x, y et z par les résultats trouvés au point b).

Coordonnées cylindriques :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi + z^2 = \rho^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) + z^2 = \rho^2 + z^2.$$

Coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos \theta = r^2 \sin^2 \theta(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \cos \theta \\ &= r^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r^2. \end{aligned}$$

On a donc les équations suivantes pour la sphère :

- Coordonnées cylindriques : $\rho^2 + z^2 = R^2$ (pas de condition sur ϕ)
- Coordonnées sphériques $r = R$ (pas de condition sur θ et ϕ).

— L'équation d'un cylindre de longueur L en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}.$$

Coordonnées cylindriques :

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi = \rho^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \rho^2 \qquad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}.$$

Coordonnées sphériques :

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi = r^2 \sin^2 \theta(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r^2 \sin^2 \theta.$$

et

$$\frac{-L}{2r} < \cos \theta < \frac{L}{2r}.$$

On a donc les équations suivantes pour le cylindre :

- Coordonnées cylindriques : $\rho = R$ avec $-\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}$
- Coordonnées sphériques : $r \sin\theta = R$ avec $\frac{-L}{2r} < \cos\theta < \frac{L}{2r}$.

— Finalement, l'équation d'un cône de hauteur h et rayon R s'écrit, en coordonnées cylindriques :

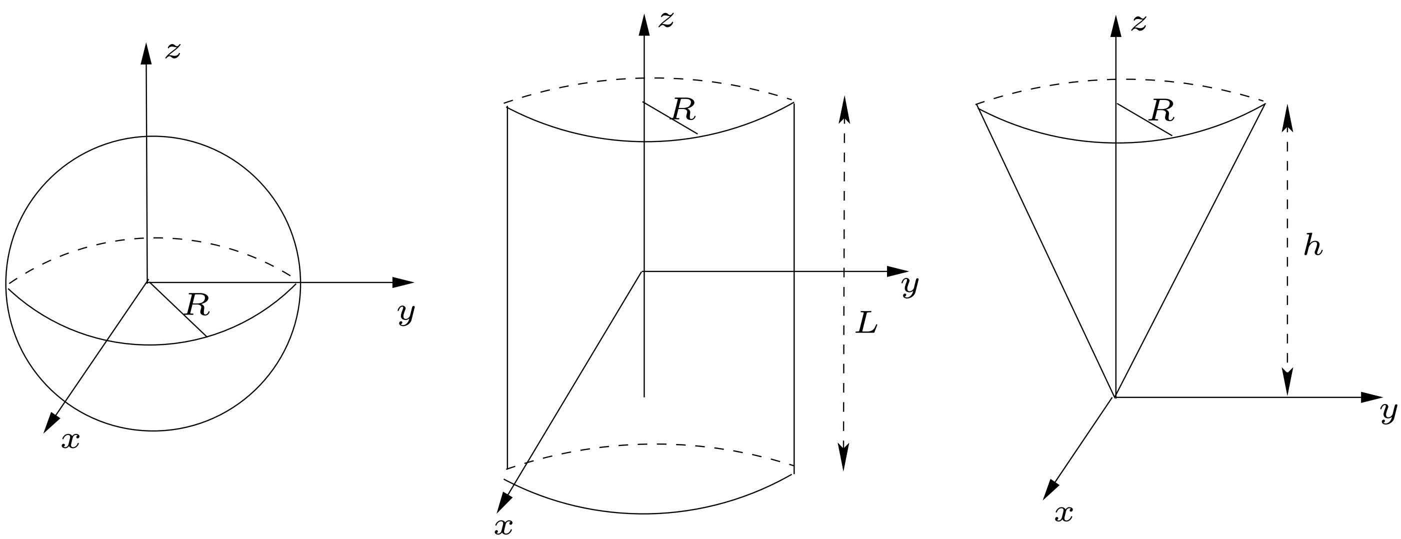
$$\frac{z}{\rho} = \frac{h}{R}, \qquad 0 < z < h.$$

En coordonnées cartésiennes, on trouve

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{h}{R}, \qquad 0 < z < h,$$

et en coordonnées sphériques

$$\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{h}{R} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{R}{h}\right), \qquad 0 < r\cos\theta < h.$$



2 Trajectoire elliptique

a) Le vecteur position du point matériel est

$$\vec{r}(t) = C_1 \cos(\omega t)\hat{\imath} + C_2 \sin(\omega t)\hat{\jmath}. \tag{6}$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et de demi-axes C_1 et C_2 selon les directions x et y centrée sur l'origine O. En effet, les coordonnées x et y du vecteur $\vec{r}$ satisfont l'équation

$$\frac{x^2}{C_1^2} + \frac{y^2}{C_2^2} = 1$$

qui est l'équation d'une ellipse de demi-axes C_1 et C_2. L'équation (6) représente l'équation horaire d'un point matériel se déplaçant sur cette ellipse. Le vecteur vitesse est donné par

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega C_1 \sin(\omega t)\hat{\imath} + \omega C_2 \cos(\omega t)\hat{\jmath}.$$

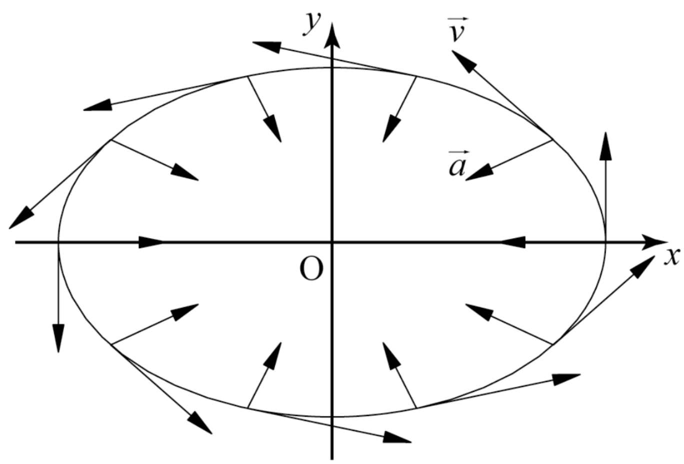
Il est toujours tangent à la trajectoire (c'est-à-dire à l'ellipse).
Le vecteur accélération est donné par

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 C_1 \cos(\omega t)\hat{\imath} - \omega^2 C_2 \sin(\omega t)\hat{\jmath}. \tag{7}$$

Ce dernier peut se ré-écrire

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Il s'agit d'un vecteur colinéaire à $\vec{r}(t)$, dirigé dans le sens opposé. Il pointe donc vers l'origine O du repère. (Voir schéma).



Pour montrer que $\vec{r}(t)$ n'est en général pas orthogonal à $\vec{v}(t)$, on calcule leur produit scalaire :

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = -C_1^2 \omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) + C_2^2 \omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) = (C_2^2 - C_1^2)\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t).$$

Cette expression n'est pas nulle si $C_1 \neq C_2$ (sauf dans les cas particuliers $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$), et donc les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ ne sont en général pas orthogonaux.

b) Pour écrire la force qui détermine ce mouvement, on utilise la loi de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}(t) = -m\omega^2 \vec{r}(t) \tag{8}$$

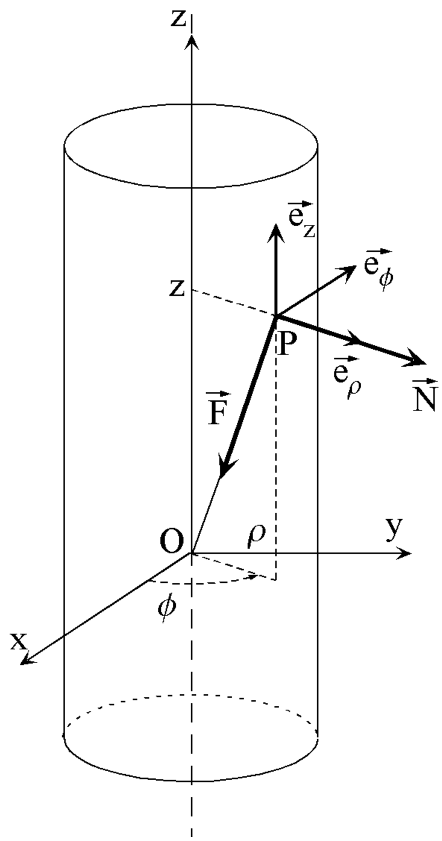
c) D'après l'équation (8), cette force est proportionelle à la distance à l'origine $|\vec{r}(t)|$, parallèle au vecteur $\vec{r}(t)$ et de sens opposé. Il s'agit d'une force de rappel, telle celle produite par un ressort de longueur au repos nulle dont une extremité est fixée à l'origine et l'autre sur le point matériel. La force gravitationnelle est, elle, inversément proportionelle au carré de la distance. Il est à noter que les deux forces produisent un mouvement elliptique. Dans cet exercice, la force est dirigée vers le centre de l'ellipse. Dans le cas de la gravitation (mouvement des planètes, par exemple), il sera vu que la force est dirigée vers l'un des foyers de l'ellipse.

2 Point sur un cylindre

Marche à suivre

Pour résoudre ce type de problèmes à contraintes, il est conseillé de :

- Choisir un système de coordonnées adapté à la résolution du problème, typiquement des coordonnées cartésiennes (en une, deux ou trois dimensions), polaires (en deux dimensions), cylindriques ou sphériques (en trois dimensions).
- Ecrire les contraintes qui s'appliquent sur le point matériel.
- Ecrire les forces qui s'appliquent sur le point matériel.
- Ecrire les équations du mouvement en partant de l'équation de Newton $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ que l'on projette sur les trois axes.
- Eventuellement résoudre ces équations pour les variables considérées (x,y,z,ϕ,θ,ρ,...), si cela est demandé.



a) En suivant la méthode de résolution, on commence par définir le système (le point matériel) et on fait le dessin ci-contre. L'évolution du système est étudiée dans un référentiel dans lequel le cylindre est fixe.
- Coordonnées : le point matériel étant contraint à se déplacer sur un cylindre, sa distance à l'axe est constante. Il est donc logique de choisir un repère $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ associé aux coordonnées cylindriques pour lesquelle la coordonnée ρ sera constante.
- Contraintes : Le point matériel doit se déplacer sur le cylindre. On a donc $\rho = R =$ constante.
- Forces : Deux forces s'exercent sur le point matériel :
  - La première est la réaction $\vec{N}$ du cylindre, qui maintient le point matériel sur le cylindre. Elle est toujours perpendiculaire à la surface du cylindre, autrement dit colinéaire à $\hat{e}_\rho$. On peut écrire $\vec{N} = N_\rho \hat{e}_\rho$ où N_ρ est la composante radiale de cette réaction. On ne connait pas *a priori* le signe de N_ρ. Sur le dessin, on a choisi arbitrairement $N_\rho > 0$ mais les équations que nous allons dériver ci-dessous sont valables dans tous les cas.
  - La deuxième force est celle qui attire le point P vers un point O sur l'axe du cylindre et qui est proportionelle à la distance entre O et P. Si on définit le vecteur $\vec{r} = \vec{OP}$ on a $\vec{F} = -k\vec{r} = -k(R\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z)$.

b) Equation du mouvement : l'équation de Newton sous forme vectorielle s'écrit

$$\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a} \tag{9}$$

Or, en coordonnées cylindriques, nous savons que l'accélération s'écrit $\vec{a}$ (voir cours) :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \tag{10}$$

En introduisant la contrainte $\rho = R$, l'équation précédente se simplifie en :

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + R\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \tag{11}$$

Nous projetons l'équation du mouvement (9) sur les axes :

$$
\begin{aligned}
\text{Sur } \hat{e}_\rho : \qquad & -mR\dot{\phi}^2 = N_\rho - kR, & (12)\\
\text{Sur } \hat{e}_\phi : \qquad & mR\ddot{\phi} = 0, & (13)\\
\text{Sur } \hat{e}_z : \qquad & m\ddot{z} = -kz. & (14)
\end{aligned}
$$

c) Pour décrire le mouvement du point matériel, examinons les équations du mouvement trouvées au point b). Le mouvement du point matériel dans la direction $\hat{e}_z$ est directement interprétable. On a obtenu $m\ddot{z} = -kz$. On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique à une dimension. La position selon z au cours du temps est donc de la forme $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
Sur $\hat{e}_\phi$, l'équation est $mR\ddot{\phi} = 0$. Il suffit de l'intégrer une fois pour obtenir $\dot{\phi} = cte$. La vitesse angulaire du point autour de l'axe du cylindre (appelons la ω_1, qui dépend des conditions initiales) est constante, la projection sur $\hat{e}_\phi$ décrit donc un mouvement circulaire uniforme.
Le mouvement du point est donc la combinaison d'un mouvement oscillatoire harmonique parallèle à l'axe z et d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe du cylindre.

d) On utilise la projection de l'équation du mouvement sur $\hat{e}_\rho$ pour trouver la valeur de N_ρ. On a trouvé

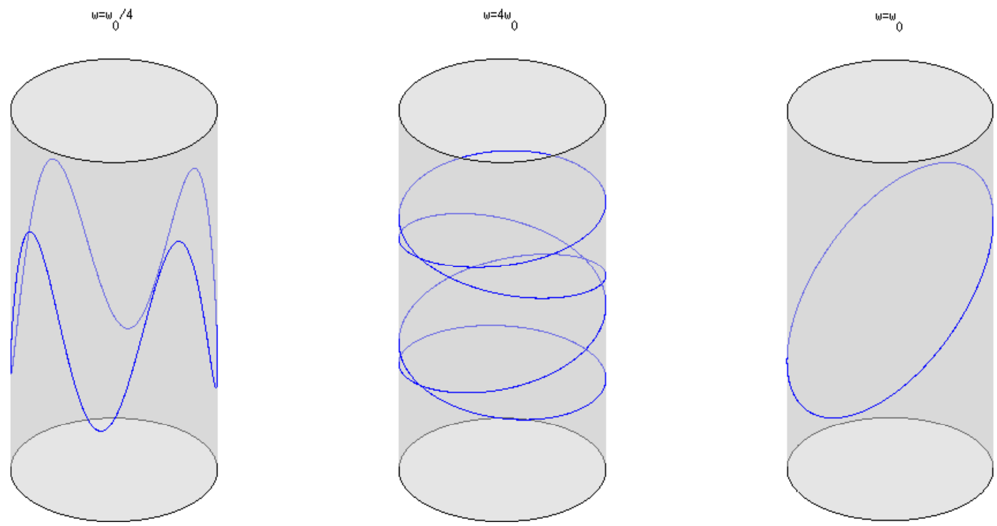
$$-mR\dot{\phi}^2 = N_\rho - kR \tag{15}$$

donc

$$N_\rho = kR - mR\omega_1^2 = mR(\frac{k}{m} - \omega_1^2) = mR(\omega_0^2 - \omega_1^2) = cte. \tag{16}$$

La composante radiale (et donc la norme) de la force de liaison qui s'exerce sur le point est donc constante. On rappelle que la force est toujours perpendiculaire à la surface du cylindre. Examinons son sens en fonction des conditions initiales, c'est-à-dire des valeurs de ω_1. On distingue 3 cas, illustrés sur les figures ci-dessous.

— Si $\omega_1 > \omega_0$, on a $N_\rho < 0$. $\vec{N}$ est donc dans le sens opposé à $\hat{e}_\rho$, c'est-à-dire dirigé vers l'intérieur. Dans ce cas, le point tourne vite autour de l'axe du cylindre. Il faut que $\vec{N}$ soit dirigé vers l'intérieur pour éviter que le point ne "s'échappe".
— Si $\omega_1 < \omega_0$, on a $N_\rho > 0$. $\vec{N}$ est donc dans le même sens que $\hat{e}_\rho$, c'est à dire dirigé vers l'extérieur. Dans ce cas, le point tourne lentement autour de l'axe du cylindre. Il faut que $\vec{N}$ soit dirigé dans le sens opposé à $\vec{F}$, sans quoi le point "tomberait" sur le point O.
— Le cas où $\omega_1 = \omega_0$ est le plus intéressant. C'est le cas où le temps que met le point pour faire une fois le tour du cylindre est le même que le temps pour faire une oscillation parallèle à l'axe z. Dans ce cas, on a $N = 0$, aucune force de liaison ne s'applique sur le point. On pourrait donc enlever le cylindre sans que la trajectoire du point soit modifiée. On peut aussi noter que dans ce cas-là, la seule force qui s'applique sur le point est la force qui attire le point vers le centre du cylindre $\vec{F} = -k\vec{r}$. La trajectoire est alors une ellipse dans un plan contenant l'origine (voir problème 1 de la série 3).


w=w0/4
w=4w0
w=w0