Corrigé Série 05 : Pendules et frottements

Rappel de cours : *Une force de frottement cinétique exercée par une surface sur un objet est toujours opposée à la direction du mouvement de l'objet par rapport à la surface ; sa norme vaut toujours $\mu_c|\vec{N}|$, où $\vec{N}$ est la force de liaison normale que la surface exerce sur l'objet et μ_c, le coefficient de frottement cinétique. Une force de frottement statique exercée par une surface sur un objet est toujours opposée à la direction du mouvement que l'objet aurait par rapport à la surface en l'absence de cette force. Sa norme s'adapte pour que l'objet reste immobile, mais ne peut jamais dépasser la valeur maximale de $\mu_s|\vec{N}|$, où μ_s est le coefficient de frottement statique. Si la norme de la force de frottement dépasse cette valeur maximale, alors l'objet se met à glisser (et c'est le frottement cinétique, et non statique, qui entre en jeu).*

Questions conceptuelles

a) La force de frottement sec entre les semelles des chaussures et le sol nous permet de nous arrêter d'un coup. En outre, sans elle, nous ne pourrions pas marcher ou courir, puisque les semelles des chaussures glisseraient sur le sol et ne pourraient contribuer à l'accélération.

b) En négligeant les frottements de l'air, la seule force qui s'applique sur un bloc de masse m est son poids $m\vec{g}$. La deuxième loi de Newton donne alors $m\vec{a} = m\vec{g}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$, indépendemment de la masse du bloc.

c) L'équilibre du livre requiert une force verticale vers le haut qui s'oppose au poids $m\vec{g}$ du livre. Il s'agit d'une force de frottement statique, qui ne peut être exercée que par votre main ou par le mur. Comme la force exercée par votre main $\vec{F}_{\text{main}}$ est horizontale, elle ne peut pas avoir de composante verticale. Donc la force de frottement doit être exercée par le mur. Si le mur est parfaitement glissant (coefficient de frottement statique μ_{s} nul), il ne peut pas exercer de force de frottement, donc la réponse à la question est "non". Si le mur n'est pas parfaitement glissant ($\mu_{\text{s}} > 0$), la réponse à la question est "oui", pour autant que la force de frottement maximale possible, $\mu_{\text{s}} F_{\text{main}}$, soit supérieure à mg.

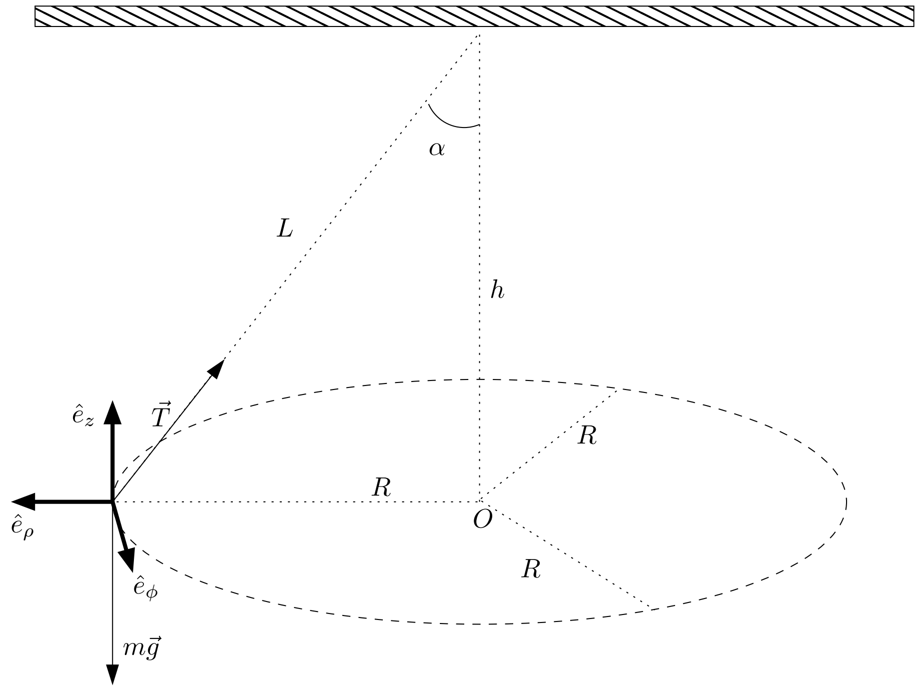
1 La chauve-souris physicienne

Le système considéré est la chauve-souris, et le référentiel est le plafond. On part comme d'habitude de l'équation de Newton sous sa forme vectorielle $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. Les forces qui s'appliquent sur la chauve-souris sont le poids et la tension du fil $\vec{T}$. On a

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \tag{1}$$

Pour résoudre ce problème, il est pratique d'utiliser un repère $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ associé aux coordonnées cylindriques avec le centre du cercle comme origine. Dans ce cas, l'accélération s'écrit (cf. cours)

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \tag{2}$$



Mais la chauve-souris subit les contraintes suivantes
- Elle tourne en rond à vitesse constante : $\dot{\phi} = cte = \omega$ et $\ddot{\phi} = 0$.
- Elle reste toujours à la même distance du plafond : $z = 0$, et $\dot{z} = \ddot{z} = 0$.
- Elle reste toujours à la même distance de son axe de rotation : $\rho = R = cte$ donc $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$.

L'accélération devient
$$\vec{a} = -R\omega^2\hat{e}_\rho. \tag{3}$$
Remarque : Sachant que $\frac{|\vec{v}|}{R} = |\vec{\omega}|$, cette équation nous redonne la relation bien connue pour un mouvement circulaire uniforme $|\vec{a}| = a_n = \frac{\vec{v}^2}{R}$.

La deuxième équation de Newton projetée sur les axes nous donne :
- Sur $\hat{e}_\rho$: $-T\sin\alpha = -mR\omega^2$.
- Sur $\hat{e}_\phi$: $0 = 0$.
- Sur $\hat{e}_z$: $T\cos\alpha - mg = 0$.

En divisant membre à membre les équations obtenues pour les projections sur $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_z$, on obtient :
$$-\tan\alpha = \frac{-R\omega^2}{g} \Rightarrow R\omega^2 = g\tan\alpha. \tag{4}$$
Finalement, en introduisant le relation trigonométrique $R = h\tan\alpha$, on obtient
$$h\tan\alpha\,\omega^2 = g\tan\alpha \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{h}\frac{\cancel{\tan\alpha}}{\cancel{\tan\alpha}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}. \tag{5}$$
Si la chauve-souris n'avait pas volé en rond, mais s'était simplement laissée balancer au bout du fil (« pendule mathématique »), on aurait obtenu une pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ et donc une période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ plus grande que $2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, puisque $L > h$.

Remarque : on peut aussi résoudre le problème de manière similaire en utilisant les coordonnées sphériques :

— Contraintes : $r = cte = L$, donc $\ddot{r} = \dot{r} = 0$. $\theta = \pi - \alpha = cte$ et $\dot{\phi} = cte = \omega$.

— L'accélération en coordonées sphériques s'écrit :

$$\vec{a} = (-L\omega^2 \sin^2\theta)\hat{e}_r + (-L\omega^2 \cos\theta \sin\theta)\hat{e}_\theta + 0\hat{e}_\phi.$$

— La projection de la deuxième loi de Newton donne

  — sur $\hat{e}_r$: $-mL\omega^2 \sin^2\theta = -T + mg\sin\theta$

  — sur $\hat{e}_\theta$: $-\cancel{m}L\omega^2 \cancel{\cos\theta} \sin\theta = -\cancel{m}g\cancel{\cos\theta}$

— En remarquant que $h = L\sin\theta$, on trouve de suite avec la deuxième équation $\omega^2 = g/h$.

2 Voiture dans un virage incliné

a) Trois forces s'exercent sur la voiture (voir dessin) :

— le poids de la voiture $m\vec{g}$.

— la force de soutien $\vec{N}$ perpendiculaire à la route.

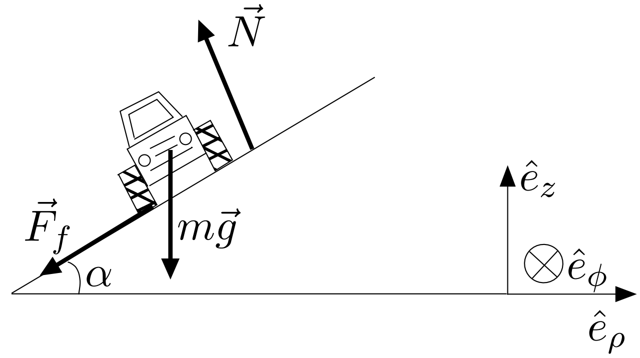
— une force de frottement statique $\vec{F}_f$, tangente à la route, perpendiculaire à la vitesse et dirigée vers l'intérieur du virage pour empêcher la voiture de déraper vers l'extérieur. Note : à basse vitesse (et à l'arrêt), $\vec{F}_f$ pointera vers l'extérieur du virage pour empêcher la voiture de tomber vers l'intérieur.

On utilise un repère associé aux coordonnées cylindriques. Dans ce repère on a :

— $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.

— $\vec{N} = N\cos\alpha\vec{e}_z - N\sin\alpha\vec{e}_\rho$

— $\vec{F}_f = -F_f\cos\alpha\vec{e}_\rho - F_f\sin\alpha\vec{e}_z$



b) Pour trouver la vitesse maximale que peut prendre la voiture, on utilise la deuxième loi de Newton

$$\vec{F}_f + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}. \tag{6}$$

L'accélération en coordonnées cylindriques s'écrit sous forme vectorielle

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + R\ddot{\phi}\hat{e}_\phi, \tag{7}$$

où l'on a introduit les contraintes $\rho = R$ et $z =$ constante. Comme le mouvement est circulaire et uniforme, $\ddot{\phi} = 0$ et donc $\dot{\phi} =$ constante $= \pm v/R$. L'accélération n'a qu'une composante selon $\hat{e}_\rho$ et est dirigée vers le centre de la trajectoire. On projette l'équation du mouvement (6) sur les axes

$$\text{sur } \hat{e}_\rho : \qquad -F_f\cos\alpha - N\sin\alpha = -m\frac{v^2}{R}, \tag{8}$$

$$\text{sur } \hat{e}_z : \qquad N\cos\alpha - mg - F_f\sin\alpha = 0. \tag{9}$$

On résout les équations (8) et (9) pour trouver les expressions de F_f et N :

$$F_f = mg\cos\alpha\left(\frac{v^2}{gR} - \tan\alpha\right), \tag{10}$$

$$N = mg\cos\alpha\left(1 + \frac{v^2}{gR}\tan\alpha\right). \tag{11}$$

On constate que l'expression de F_f n'est positive que si $v^2 > gR\tan\alpha$, ce qui correspond au cas que nous discutons, où la vitesse est suffisamment grande pour que la force de frottement soit dirigée comme sur le dessin.

La condition pour que la voiture ne dérape pas vers l'extérieur est $F_f \le \mu N$, c'est-à-dire :

$$\frac{v^2}{gR} - \tan\alpha \le \mu\left(1 + \frac{v^2}{gR}\tan\alpha\right), \tag{12}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{v^2}{gR}(1-\mu\tan\alpha) \le \mu + \tan\alpha. \tag{13}$$

Deux cas doivent être considérés :

i) Si $1-\mu\tan\alpha \le 0$, c'est-à-dire si $\tan\alpha \ge \frac{1}{\mu}$, alors la condition est automatiquement satisfaite. Dans ce cas, la voiture ne peut pas déraper vers l'extérieur et la force de frottement ne peut jamais atteindre sa valeur maximale, même si la vitesse tend vers l'infini.

ii) Si $1-\mu\tan\alpha > 0$, c'est-à-dire si $\tan\alpha < \frac{1}{\mu}$, alors la condition devient

$$\frac{v^2}{gR} \le \frac{\mu+\tan\alpha}{1-\mu\tan\alpha}. \tag{14}$$

Soit finalement,

$$v \le \sqrt{gR\frac{\mu+\tan\alpha}{1-\mu\tan\alpha}} \tag{15}$$

Une analyse dimensionnelle montre que le membre de droite a bien la dimension d'une vitesse.

Application numérique : $v_{\max} = \sqrt{10\times 300\frac{1+\tan(15\pi/180)}{1-1\times\tan(15\pi/180)}} \simeq 72$ m/s $\simeq 260$ km/h.

3 La feuille d'exercices

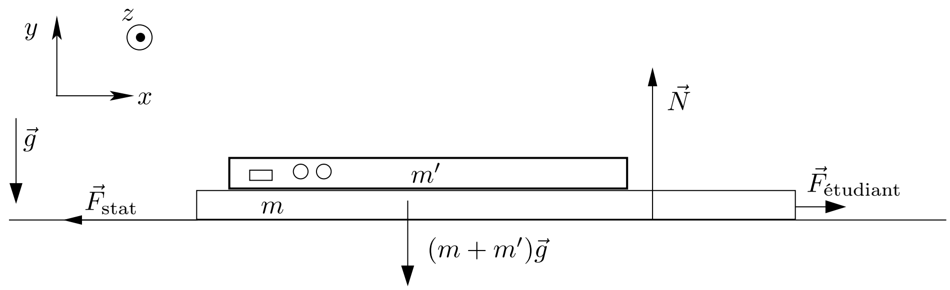
a) On décrit la situation dans le référentiel de la table. On choisit un repère fixe avec l'axe x horizontal dans la direction de la force exercée par l'étudiant et un axe y vertical vers le haut. Lorsque la force $\vec{F}_{\text{etudiant}}$ est trop petite pour mettre la feuille en mouvement, les forces extérieures qui s'appliquent sur le système *feuille+téléphone* sont

— son poids $(m+m')\vec{g}$, où $\vec{g} = -g\hat{e}_y$,

— la force de soutien de la table $\vec{N} = N\hat{e}_y$,

— la force horizontale $\vec{F}_{\text{etudiant}} = F_{\text{etudiant}}\hat{e}_x$,

— la force de frottement statique exercée par la table $\vec{F}_{\text{stat}} = -F_{\text{stat}}\hat{e}_x$, horizontale et de direction opposée à $\vec{F}_{\text{etudiant}}$.



Rappel : le système *feuille+téléphone* est traité ici comme un point matériel et on ne considère donc que les forces appliquées par l'extérieur du système sur ce "point". Les forces internes à ce point (par exemple les forces de frottements entre la feuille et le téléphone) n'interviennent pas.

Le système est à l'équilibre, la deuxième loi de Newton s'écrit

$$(m+m')\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{etudiant}} + \vec{F}_{\text{stat}} = \vec{0}.$$

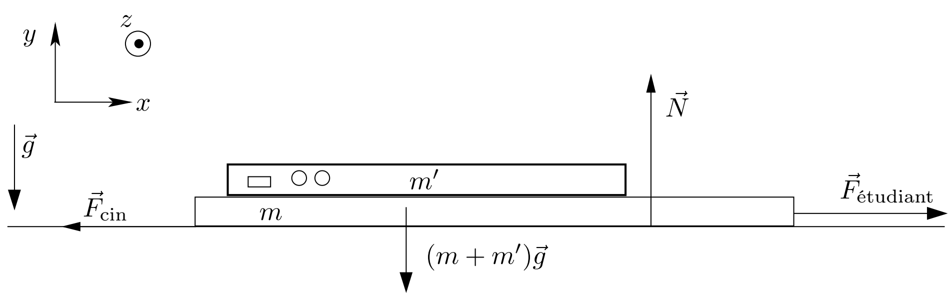
En projection sur l'axe vertical y, on a $N = (m+m')g$.

En projection sur l'axe horizontal x, on a $F_{\text{stat}} = F_{\text{etudiant}}$, qui est vérifiée tant que la valeur maximale de la norme de la force de frottement, $F_{\text{stat}}^{max} = \mu_s|\vec{N}|$, n'est pas atteinte. Donc, pour que le système *feuille+téléphone* ne bouge pas :

$$|\vec{F}_{\text{etudiant}}| < F_{\text{stat}}^{max} = \mu_s|\vec{N}| = \mu_s(m+m')g.$$

Si $|\vec{F}_{\text{etudiant}}|$ est plus grand que cette valeur limite, le système feuille+téléphone se met en mouvement.

b) Lorsque la force $|\vec{F}_{\text{etudiant}}|$ est plus grande que la valeur limite $\mu_s(m+m')g$, le système feuille+téléphone se met en mouvement. Cependant si la force $\vec{F}_{\text{etudiant}}$ est trop faible pour que la feuille glisse sous le téléphone, ce dernier reste sur la feuille en tout temps et on peut étudier le système *feuille+téléphone* en mouvement. Lorsque le système *feuille+téléphone* est en mouvement, la force de frottement statique est remplacée par une force de frottement cinétique $\vec{F}_{\text{cin}}$. Elle est exercée par la table et est horizontale et de direction opposée à $\vec{F}_{\text{etudiant}}$.

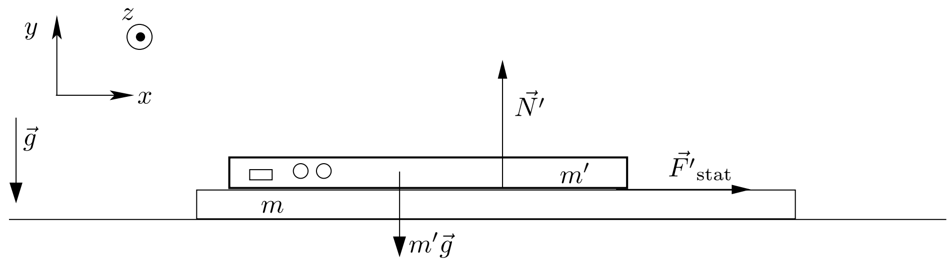


Considérons maintenant les forces qui s'appliquent sur le téléphone :

— son poids $m'\vec{g}$,

— la force de soutien exercée par la feuille $\vec{N'}$,

— la force de frottement exercée par la feuille $\vec{F}'_{\text{stat}}$. Cette force est horizontale dans une direction qui empêche le téléphone de glisser sur la feuille ; comme le téléphone pourrait glisser vers la gauche (vers les x négatifs), la force de frottement statique est dirigée vers la droite (vers les x positifs).



Considérons les projections selon x de la deuxième équation de Newton pour le téléphone, ainsi que pour le système *feuille+téléphone* (les projections selon y ne servent qu'à déterminer les valeurs de forces de soutien $\vec{N}$ et $\vec{N}'$ et sont évidentes).

— Pour le téléphone : $F'_{\text{stat}} = m'\ddot{x}'$.
— Pour le système feuille+téléphone : $F_{\text{etudiant}} - F_{\text{cin}} = (m + m')\ddot{x}$.

Dans la situation où le téléphone ne bouge pas par rapport à la feuille, on a $\ddot{x} = \ddot{x}'$. En combinant les deux équations précédentes, on obtient

$$F_{\text{etudiant}} = F_{\text{cin}} + (m + m')\frac{F'_{\text{stat}}}{m'}. \tag{16}$$

Ceci est vrai tant que la force F'_{stat} ne dépasse pas la valeur limite $F'^{max}_{\text{stat}} = \mu'_s|\vec{N}'| = \mu'_s m' g$, faute de quoi le téléphone se mettra en mouvement par rapport à la feuille. La condition pour que la feuille glisse sous le téléphone s'écrit donc

$$\begin{aligned} F_{\text{etudiant}} &> F_{\text{cin}} + \frac{m + m'}{m'}\mu'_s m' g \\ &= (\mu_c + \mu'_s)(m + m')g, \end{aligned}$$

où l'on a introduit $F_{\text{cin}} = \mu_c(m + m')g$.
Cependant pour que la feuille glisse sous le téléphone, il faut également exiger que $F_{\text{etudiant}} > \mu_s(m + m')g$ pour mettre en mouvement la feuille (résultat du point a)). Si ce n'est pas le cas, la condition trouvée au point a) n'est pas satisfaite et tout restera immobile. Finalement, la condition pour que la feuille glisse sous le téléphone est donc

$$F_{\text{etudiant}} > \max\left[\mu_s, (\mu_c + \mu'_s)\right](m + m')g. \tag{17}$$

4 Pendule sur une porte

— Dessin : voir ci-dessous
— Coordonnées : les coordonnées les plus appropriées pour décrire ce problème sont les coordonnées sphériques ($\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\phi$). Ce sont les coordonnées qui décrivent respectivement la longueur du fil, l'angle du fil et l'angle de la porte.
— Contraintes : la longueur du fil est constante, on a $r = cte = L$ et donc $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. La porte tourne à vitesse constante, on a $\dot{\phi} = cte = \omega$ et donc $\ddot{\phi} = 0$.

a) Forces qui s'appliquent sur le point matériel :

— le poids $m\vec{g} = -mg\cos\theta\hat{e}_r + mg\sin\theta\hat{e}_\theta$.
— la tension du fil $\vec{T} = T_r\hat{e}_r$, la configuration est telle que T_r est toujours négatif.
— La force de contrainte de la porte $\vec{N} = N_\phi\hat{e}_\phi$.

Pour obtenir les équations du mouvement, on utilise la deuxième loi de Newton : $\vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$. En coordonnées sphériques, avec les contraintes citées ci-dessus, l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \left(-L\dot{\theta}^2 - L\omega^2\sin^2\theta\right)\hat{e}_r + \left(L\ddot{\theta} - L\omega^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{e}_\theta + 2L\omega\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_\phi. \tag{18}$$

On peut projeter l'équation sur les 3 axes :
— Sur $\hat{e}_r$: $T_r - mg\cos\theta = -mL\dot{\theta}^2 - mL\omega^2\sin^2\theta$.
— Sur $\hat{e}_\theta$: $mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} - mL\omega^2\sin\theta\cos\theta$.
— Sur $\hat{e}_\phi$: $N_\phi = 2mL\dot{\theta}\omega\cos\theta$.

b) Quand $\omega \to 0$, on obtient l'équation $mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$, qui redonne l'équation du pendule vue dans le cours en faisant le changement de variable $\alpha = \pi - \theta$: $\ddot{\alpha} = -\frac{g}{L}\sin\alpha$.
Quand $L \to 0$, on obtient à partir de la projection de l'équation du mouvement sur $\hat{e}_\theta$ que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Pour le cas $\theta = 0$, on trouve $T_r = mg$ et pour $\theta = \pi$, on trouve $T_r = -mg$. Dans les deux cas, le vecteur $\vec{T}$ est dirigé vers le haut, ce qui est bien ce à quoi on s'attend, car $\vec{T}$ doit s'opposer au poids.