# Corrigé Série 06 : Energie et équilibre

## Questions conceptuelles

a) Pour gravir une pente, on exerce une force égale et opposée au poids, $\vec{P}$, qui effectue un travail par unité de temps $dW/dt = Pdh/dt$, où $dh/dt$ est la hauteur parcourue par unité de temps. Si la pente est gravie en zigzag plutôt que tout droit, $dh/dt$ et, par conséquent la puissance fournie, $dW/dt$, est plus petite.

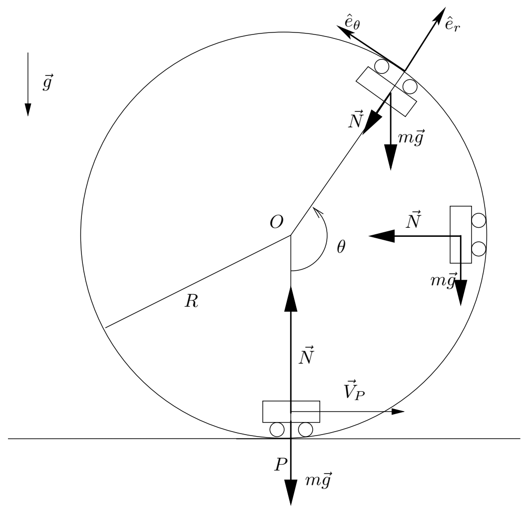
b) La caisse subit deux forces, son poids et la force que vous exercez (en réalité, elle subit tout au début une force de réaction du sol, et tout à la fin une force de réaction de la table ; nous ferons comme si ces forces de soutien étaient en fait aussi exercées par vous, autrement dit la situation initiale est une caisse que vous soutenez au niveau du sol et la situation finale est une caisse que vous soutenez au niveau de la table).
Au départ, votre force est égale et opposée au poids, et la caisse est immobile. A l'arrivée, votre force est égale et opposée au poids, et la caisse est immobile. Donc, entre le départ et l'arrivée, l'énergie cinétique de la caisse n'a pas changé, ce qui signifie que le travail de la résultante des forces qui se sont exercées sur elle pendant la manoeuvre est nul (théorème de l'énergie cinétique) ; on en déduit que le travail de votre force est opposé au travail de poids. Comme le travail du poids vaut $-mgh$, où $h$ est la hauteur de la table, le travail de votre force vaut nécessairement $mgh$. Ce résultat est d'une simplicité surprenante, quand on pense que la caisse doit nécessairement subir des accélérations pendant son trajet et donc que votre force ne reste pas constamment égale au poids de la caisse.
Finalement, on a les réponses suivantes aux questions posées dans l'énoncé :
(i) non
(ii) non
(iii) oui
(iv) oui

### 1 Loop the loop

Cet exercice permet en fait de vérifier la faisabilité de l'expérience présentée dans la vidéo suivante : `https://www.youtube.com/watch?v=wiZoVAZGgsw`.

a) Afin d'arriver aux équations du mouvement, on va faire un dessin, choisir un repère, identifier les forces et les contraintes, et écrire la deuxième loi de Newton d'abord sous forme vectorielle puis projetée sur les axes du repère choisi.

— Dessin : voir ci-contre.




— Coordonnées : le problème se passe sur un cercle, on choisit naturellement un repère lié au système de coordonnées polaires $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$, avec $r = 0$ au centre $O$ du cercle et $\theta = 0$ à la verticale en-dessous de $O$. Les coordonnées polaires $r$ et $\theta$ ainsi définies correspondent aux coordonnées cylindriques usuellement appelées $\rho$ et $\phi$, où l'axe $x$ est vertical pointant vers le bas et l'axe $z$ est horizontal pointant en dehors du dessin (ou aux variables $r$ et $\phi$ des coordoneés sphériques).

— Contraintes : le point se déplace sur le cercle, on a la contrainte $r =$ cte $= R$ et donc $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ et $z =$cte.

— Forces : deux forces s'exercent sur la voiture.

  — La réaction $\vec{N}$ de la route circulaire : elle est perpendiculaire au cercle, autrement dit colinéaire à $\hat{e}_r$. On peut écrire $\vec{N} = N_r\hat{e}_r$ où $N_r$ est la composante selon $\hat{e}_r$ de cette réaction. Cette dernière s'ajuste en permanence de façon à empêcher la voiture de passer à travers la route. La configuration du problème est telle que $N_r$ ne peut prendre que des valeurs négatives.

  — Le poids de la voiture $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta\hat{e}_r - mg\sin\theta\hat{e}_\theta$.

— Equation du mouvement : la deuxième loi de Newton s'écrit sous forme vectorielle :

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

En coordonnées polaires, avec la contrainte $r = R =$ cte, l'accélération s'écrit

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{e}_r + R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta.$$

En projetant sur les axes, on obtient les équations du mouvement demandées :

$$\text{Sur } \hat{e}_r : \qquad -mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + N_r, \tag{1}$$

$$\text{Sur } \hat{e}_\theta : \qquad mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta. \tag{2}$$

b) Exprimons la vitesse $V$ et la hauteur $h$ de la voiture en fonction de $\theta$ : $V = R\dot{\theta}$ et $h = R(1 - \cos\theta)$. On peut donc écrire l'énergie mécanique en tout point repéré par $\theta(t)$ comme

$$E_{tot}(t) = E_{pot}(t) + E_{cin}(t) = mgR(1 - \cos\theta(t)) + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}(t)^2 = \text{cte}\,.$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = mgR\sin\theta\dot{\theta} + mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = \dot{\theta}(mgR\sin\theta + mR^2\ddot{\theta})$$

On reconnait l'équation du mouvement trouvée au point a) et obtient donc

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 0.$$

On a ainsi démontré que l'énergie est une intégrale première du mouvement.

c) On cherche à exprimer $N_r$ en fonction de la position $\theta$ de la voiture et de sa vitesse $V_P$ au point d'entrée P dans la boucle. Il y a deux façons d'arriver à ce résultat : soit en partant de la conservation de l'énergie mécanique totale soit en intégrant les équations du mouvement.

A partir de la conservation de l'énergie mécanique : L'énergie mécanique totale de la voiture en tout point de sa trajectoire s'écrit :

$$E_{pot} + E_{cin} = mgh + \frac{1}{2}mV^2. \tag{3}$$

De plus, on connait l'énergie mécanique de la voiture au moment d'entrer dans le looping, au point $P$ :

$$E_{cin,P} + E_{pot,P} = \frac{1}{2}mV_P^2 + 0. \tag{4}$$

puisque $h_P = R(1-\cos\theta_p) = R(1-\cos(0)) = 0$. En utilisant le fait que l'énergie mécanique de la voiture est conservée au cours du looping, on peut écrire

$$\begin{aligned} mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mV^2 &= \frac{1}{2}mV_P^2 + 0 \\ \Rightarrow V^2 &= V_P^2 - 2gR(1-\cos\theta). \end{aligned}$$

Or $V = R\dot{\theta}$, donc

$$\dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{R^2} = \frac{V_P^2 - 2gR(1-\cos\theta)}{R^2},$$

que l'on peut remplacer dans l'équation (1) pour obtenir $N_r$ :

$$N_r = -m\frac{V_P^2}{R} + 2mg(1-\cos\theta) - mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad N_r = -m\frac{V_P^2}{R} + 2mg - 3mg\cos\theta \tag{5}$$

A partir de l'équation du mouvement : Pour obtenir l'intégrale première du mouvement, on doit intégrer par rapport au déplacement, $dx$, qui est égale à $R\dot{\theta}dt$ dans ce problème. Comme $R$ est une constante, il peut être omis, et il suffit de multiplier chaque membre de l'équation (2) par $\dot{\theta}dt$ et d'intégrer. C'est une méthode couramment utilisée pour intégrer une équation du mouvement (elle est utilisée au cours pour traiter le cas du pendule), il est conseillé de la retenir. On a ainsi

$$\int mR\ddot{\theta}\,\dot{\theta}dt = \int -mg\sin\theta\,\dot{\theta}dt\,,$$

que l'on intègre (avec $C_1$ et $C_2$ des constantes d'intégration)

$$mR\Big(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\Big) + C_1 = mg\cos\theta + C_2\,,$$

et que l'on récrit :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = C_2 - C_1 \equiv C\,. \tag{6}$$

Ceci démontre que $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta$ est une constante du mouvement.

Pour trouver la constante, on utilise les conditions initiales : lorsque la voiture est en $\theta = 0$, elle a une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{V_P}{R}$. On en déduit $C = -\frac{g}{R} + \frac{1}{2}(\frac{V_P}{R})^2$. Et donc

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\cos\theta = -\frac{g}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{V_P}{R}\right)^2.$$

On multiplie ce résultat par $-2mR$ pour faire apparaître le terme $-mR\dot{\theta}^2$ :

$$-mR\dot{\theta}^2 = 2gm(1-\cos\theta) - m\frac{V_P^2}{R}.$$

que l'on injecte dans l'équation (1). On trouve finalement la même expression que l'équation (5) pour $N_r$ :

$$N_r = -m\frac{V_P^2}{R} + 2mg - 3mg\cos\theta. \tag{7}$$

d) La condition d'adhérence de la voiture au circuit sur toute la durée du looping est que $N_r$ reste toujours négative. Donc la voiture décolle dès que $N_r = 0$. Or, d'après (7), la valeur maximale de $N_r$ (donc la plus proche de 0 puisque $N_r < 0$) est atteinte quand $\cos\theta = -1$ (car un cosinus ne prend que des valeurs comprises entre $-1$ et 1) c'est-à-dire au sommet du looping quand $h = 2R$. Ceci correspond bien à ce à quoi on s'attend intuitivement : c'est en haut du looping que la voiture est la moins plaquée contre la route.

$$N_{r,max} = 5mg - m\frac{V_P^2}{R}. \tag{8}$$

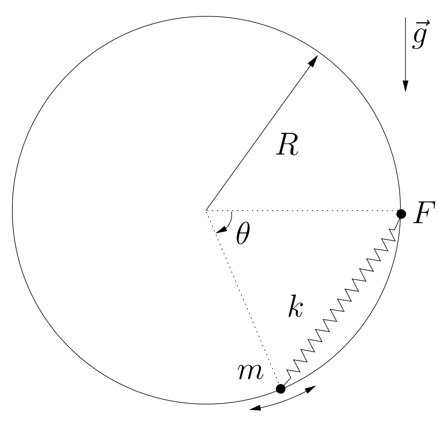
La voiture ne décolle pas si $N_{r,max} < 0$ et donc si et seulement si

$$V_P > \sqrt{5gR}. \tag{9}$$

## 2 Pendule perturbé par un ressort

Après une lecture attentive de la donnée, on réalise que le problème posé se rapproche du pendule traité en cours.

a) L'énergie potentielle du point matériel est la somme de l'énergie potentielle de gravitation et de l'énergie potentielle du ressort.




$$E_{pot} = E_{ressort} + E_{grav.} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + mgh$$

où $\Delta l = l - l_0$ est l'allongement du ressort (ici, $l_0 = 0$) et $h$ l'altitude du point matériel ($h = 0$ en $F$). On désire exprimer cette énergie potentielle en fonction de $\theta$.

Comme

$$l = 2R\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad h = -R\sin\theta$$

on écrit

$$E_{pot}(\theta) = \frac{1}{2}k\Big(2R\sin\frac{\theta}{2}\Big)^2 - mgR\sin\theta \tag{10}$$

$$= 2kR^2\sin^2\frac{\theta}{2} - mgR\sin\theta. \tag{11}$$

On utilise la relation

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} E_{pot}(\theta) &= kR^2(1-\cos\theta) - mgR\sin\theta && (12)\\ &= kR^2 - kR^2\cos\theta - mgR\sin\theta. && (13)\end{aligned}$$

Remarque : on arrive au même résultat en utilisant le théorème du cosinus $l^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta$.

b) Les positions d'équilibre correspondent aux valeurs de $\theta$ pour lesquelles la dérivée de l'énergie potentielle est nulle. On doit donc satisfaire la condition

$$\left.\frac{dE_{pot}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{\mathrm{eq}}} = 0. \tag{14}$$

On a

$$\frac{dE_{pot}}{d\theta} = kR^2\sin\theta - mgR\cos\theta.$$

La condition (14) devient

$$kR^2\sin\theta_{\mathrm{eq}} = mgR\cos\theta_{\mathrm{eq}} \Rightarrow \tan\theta_{\mathrm{eq}} = \frac{mg}{kR}. \tag{15}$$

Autrement dit

$$\theta_{\mathrm{eq},1} = \arctan\frac{mg}{kR} \quad \text{et} \quad \theta_{\mathrm{eq},2} = \arctan\frac{mg}{kR} + \pi \tag{16}$$

dans l'intervalle $\theta \in [0, 2\pi]$.

La stabilité des positions d'équilibre est donnée par le signe de la dérivée seconde du potentiel au point d'équilibre : si $\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\mathrm{eq}}} > 0$, la position d'équilibre est stable, si $\left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\mathrm{eq}}} < 0$, elle est instable.

$$\begin{aligned} \frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2} &= kR^2\cos\theta + mgR\sin\theta && (17)\\ &= \cos\theta(kR^2 + mgR\tan\theta). && (18)\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (15), on a

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\mathrm{eq}}} &= \cos\theta_{\mathrm{eq}}(kR^2 + mgR\frac{mg}{kR}) && (19)\\ &= \cos\theta_{\mathrm{eq}}\frac{1}{k}(k^2R^2 + m^2g^2). && (20)\end{aligned}$$

Pour la première position d'équilibre ($\theta_{\mathrm{eq},1} = \arctan\frac{mg}{kR} \in [0, \frac{\pi}{2}]$), cette expression est positive, car $\cos\theta_{\mathrm{eq},1}$ est positif. Le point d'équilibre $\theta_{\mathrm{eq},1}$ est donc stable.
Pour la deuxième position d'équilibre ($\theta_{\mathrm{eq},2} = \arctan\frac{mg}{kR} + \pi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$), cette expression est négative, car $\cos\theta_{\mathrm{eq},2}$ est négatif. On en conclu que le point d'équilibre $\theta_{\mathrm{eq},2}$ est instable.

c) On va d'abord développer l'énergie potentielle autour du point d'équilibre. On rappelle le développement de Taylor d'une fonction

$$f(\theta) = f(\theta_0) + f'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + f''(\theta_0)\frac{(\theta - \theta_0)^2}{2} + o((\theta - \theta_0)^2).$$

Notons $\delta\theta = \theta - \theta_{\text{eq},1}$. Pour $\theta$ proche de $\theta_{\text{eq},1}$, on a donc que

$$E_{pot} \approx E_{pot}(\theta_{\text{eq},1}) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\text{eq},1}} \delta\theta^2 \tag{21}$$

On remarque aussi que $\dot{\delta\theta} = \dot{\theta}$. On peut donc réécrire l'énergie mécanique du système comme

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\delta\theta}^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\text{eq},1}} \delta\theta^2 + Cst$$

Ceci est l'énergie d'une oscillateur harmonique de "masse" effective $m_{\text{eff}} = mR^2$ et de "raideur" effective $k_{\text{eff}} = \left.\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\text{eq},1}}$. Les guillemets sont là car ni $m_{\text{eff}}$ ni $k_{\text{eff}}$ n'ont les bonnes unités. La pulsation sera donnée par

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}}.$$

Ce résultat est en fait très général dès que l'on dévelopera le mouvement d'un solide autour d'une position d'équilibre stable (car on veut que $k_{\text{eff}} > 0$). Dans le cas d'un équilibre instable, on obtiendrait un $k_{\text{eff}} < 0$, ce qui mènerait à des mouvements exponentiellements amplifiés, et donc l'approximation des petites variations deviendrait rapidement fausse.

Revenons à notre modèle.

$$\left.\frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_{\text{eq},1}} = \cos\theta_{\text{eq},1}\frac{1}{k}(k^2R^2 + m^2g^2)$$

ce qui nous donne

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m_{\text{eff}}}} = \left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{g}{R}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}. \tag{22}$$

Pour développer le cosinus, on a utilisé

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta}.$$

On peut aussi réécrire

$$\omega^2 = \sqrt{\omega^2_{\text{ressort}} + \omega^2_{\text{pendule}}},$$

où $\omega_{\text{ressort}}$ est la pulsation associée au ressort nu, et $\omega_{\text{pendule}}$ la pulsation associée au mouvement pendulaire de la balle en l'absence de ressort.

**Note :** Une dérivation plus rigoureuse pour les unités est la suivante. On peut définir la coordonnée curviligne $s$, définie comme $s(\theta) = R\theta$ qui caractérise le mouvement de la particule, et en particulier $\delta s = R(\theta - \theta_{\text{eq},1})$. On note que $s$ a bien les dimensions d'une longeur. L'énergie cinétique se récrit alors comme

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m \dot{\delta s}^2. \tag{23}$$

Pour des petites variations, on peut alors faire le développement de $E_{pot}$ autour de $\delta s = 0$. On obtient alors

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{\delta s}^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\delta s^2} \right|_{\delta s = 0} \delta s^2 + Cst$$

. La masse de l'osccilateur harmonique est alors bien $m$, une masse. Et la raideur effective est

$$k_{\text{eff}} = \left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\delta s^2} \right|_{\delta s = 0} = \frac{1}{R^2} \left. \frac{d^2 E_{pot}}{d\theta^2} \right|_{\theta_{\text{eq},1} = 0}.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

d) Faisons un rappel des résultats obtenus au b) et c). Les positions d'équilibre sont données par l'équation (16)

$$\theta_{\text{eq},1} = \arctan \frac{mg}{kR} \quad \text{et} \quad \theta_{\text{eq},2} = \arctan \frac{mg}{kR} + \pi.$$

La solution $\theta_{\text{eq},1}$ est stable, alors que $\theta_{\text{eq},2}$ instable. La pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable est donnée par l'équation (22)

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{m}} = \left[ \left( \frac{k}{m} \right)^2 + \left( \frac{g}{R} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Dans le cas limite $k \to 0$ (le ressort est tellement faible qu'il ne joue aucun rôle), on obtient

$$\theta_{\text{eq},1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \theta_{\text{eq},2} = \frac{3\pi}{2}$$

et

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Ce qui est bien ce à quoi on s'attend : il y a une position d'équilibre stable au point le plus bas du cercle ($\theta = \frac{\pi}{2}$) et une instable au sommet du cercle ($\theta = \frac{3\pi}{2}$). La pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable est celle du pendule.

Dans le cas limite $g \to 0$ (le point matériel $m$ n'est plus soumis à la gravité), on obtient

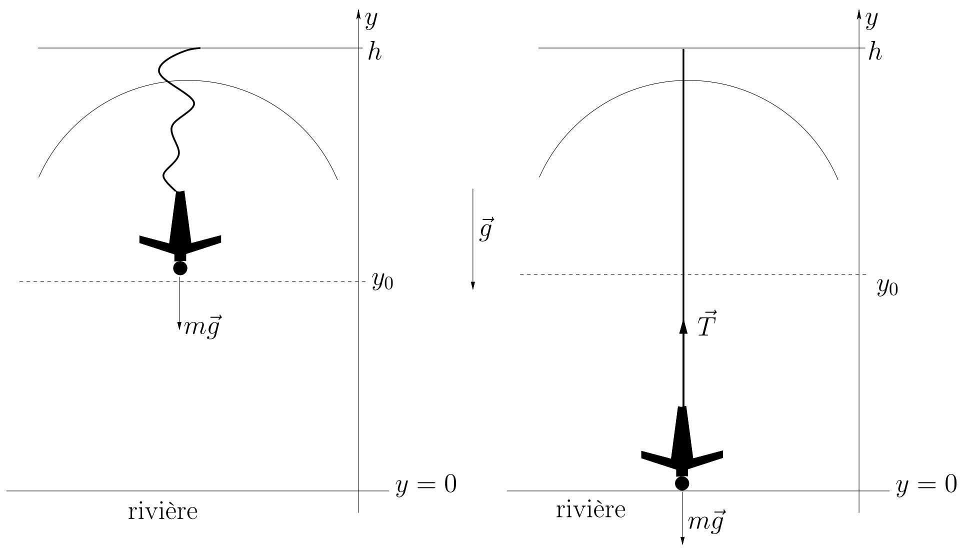
$$\theta_{\text{eq},1} = 0 \quad \text{et} \quad \theta_{\text{eq},2} = \pi$$

et

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ce qui est également ce à quoi on s'attend : il y a une position d'équilibre stable au point $F$ (le ressort est complètement replié, $\theta = 0$) et une instable en face ($\theta = \pi$). La pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable est celle d'un oscillateur harmonique de constante $k$.

## 3 Saut à l'élastique




a) Pour trouver la longueur à vide de l'élastique, on va utiliser la conservation de l'énergie mécanique. On fait d'abord un schéma de la situation avec un axe vertical $y$ dirigé vers le haut et son origine au niveau de la rivière. Le haut du pont est en $y = h$. (On aurait pu choisir, comme dans l'exemple du saut à l'élastique présenté dans le cours, de placer l'axe vertical vers le bas, mais cela n'aurait rien changé aux résultats, qui sont indépendants du repère choisi.) On considère que l'étudiante est un point matériel. Tout au long de sa chute, la personne est soumise à son poids $m\vec{g} = -mg\hat{e}_y$. Par contre la tension exercée par l'élastique $\vec{T} = -k\Delta y\hat{e}_y$ agit seulement une fois que l'élastique est tendu (à partir de la position $y = y_0$). La longueur $h - y_0$ est donc la longueur à vide de l'élastique $l_0$ que l'on cherche. L'allongement de l'élastique $\Delta y$ est donné par

$$\Delta y = \begin{cases} 0 & \text{si } y_0 \leq y \leq h \text{ (chute libre),} \\ y - y_0 & \text{si } 0 \leq y \leq y_0 \text{ (chute "assistée").} \end{cases}$$

On re-écrit ces conditions pour faire apparaître $l_0$ à la place de $y_0$ puisque $y_0 = h - l_0$ :

$$\Delta y = \begin{cases} 0 & \text{si } h - l_0 \leq y \leq h \text{ (chute libre),} \\ y - h + l_0 & \text{si } 0 \leq y \leq h - l_0 \text{ (chute "assistée").} \end{cases}$$

Les deux forces exercées sur la personne sont conservatives, et donc l'énergie mécanique totale incluant l'énergie cinétique et les énergies potentielles dont ces deux forces dérivent est conservée. L'énergie mécanique totale s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy + \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 \tag{24}$$

Au départ, sur le pont, l'énergie cinétique est nulle ainsi que l'énergie potentielle associée à la tension de l'élastique. On a donc

$$E = 0 + mgh + 0.$$

A l'arrivée, juste au-dessus de la rivière, l'énergie cinétique est également nulle (la chute de la personne est stoppée, sa vitesse est nulle) et l'énergie potentielle de pesanteur est nulle. On a donc :

$$E = 0 + 0 + \frac{1}{2}k(h - l_0)^2.$$

La conservation de l'énergie donne :

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-l_0)^2 \quad \Rightarrow \quad (h-l_0)^2 = 2\frac{mgh}{k} \quad \Rightarrow \quad h - l_0 = \mp\sqrt{2\frac{mgh}{k}}.$$

$$\Rightarrow \quad l_0 = h \pm \sqrt{\frac{2mgh}{k}}.$$

La longueur à vide de l'élastique doit évidemment être plus petite que la hauteur du pont (!) donc la solution qui a une signification physique est

$$l_0 = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \tag{25}$$

Remarque : La longueur $l_0$ devant être positive, cette solution n'existe que si $h > 2mg/k$, c'est-à-dire si le pont est suffisamment haut, l'élastique suffisamment "fort", et la personne suffisamment légère.

b) Durant la phase de chute libre, le mouvement est uniformément accéléré ; la vitesse maximale durant cette phase a donc lieu en $y = y_0 = h - l_0$, qui marque le début de la phase "assistée" par l'élastique. Durant cette deuxième phase, la vitesse va encore croître jusqu'à une vitesse maximale. L'énergie mécanique totale vaut

$$E_{tot} = E_{pot} + E_{cin} = mgy + \frac{1}{2}k(h-l_0-y)^2 + \frac{1}{2}mv_y^2.$$

La vitesse est maximale quand l'énergie cinétique $E_{cin}(y)$ est maximale. Mais pour que l'énergie soit conservée, il faut qu'à la position où l'énergie cinétique est maximale, l'énergie potentielle

$$E_{pot}(y) = mgy + \frac{1}{2}k(h-l_0-y)^2$$

soit minimale (voir figure ci-après). Ceci est réalisé quand $\frac{d(E_{pot})}{dy} = 0$ :

$$\frac{d(E_{pot})}{dy} = mg - k(h-l_0-y) = 0, \tag{26}$$

et donc la hauteur à laquelle la vitesse est maximale est

$$y = h - l_0 - \frac{mg}{k}\,. \tag{27}$$