EPFL — Lénaïc Chizat
Sections MX-EL-CGC — 16 octobre 2023

Analyse I – Série 4

Echauffement 1. (Formule d'Euler)

Vérifier les égalités suivantes :

$$(i)\ e^{-i\pi/2} = -i \qquad (ii)\ e^{-i\pi} = -1 \qquad (iii)\ \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

Sol. :

(i) $e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2) = 0 + i(-1) = -i$

(ii) $e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1 + i(0) = -1$

(iii) $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} + i\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$

Echauffement 2. (Forme Polaire)

Calculer le module des nombres complexes suivants.

a) e^{i+1} b) $e^{-(i+1)}$ c) $e^{-(i-1)}$ d) $e^{(i-50)}$ e) $e^{(1-50i)}$

Sol.:

On va utiliser que pour $z = a + i\,b$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$, *on a*

$$|e^z| = (e^z\,\overline{e^z})^{1/2} = \Big(e^z\,e^{\bar z}\Big)^{1/2} = \Big(e^{z+\bar z}\Big)^{1/2} = e^{\frac{z+\bar z}{2}} = e^{\mathrm{Re}(z)} = e^a.$$

a) $|e^{i+1}| = e^1 = e$ *b)* $\left|e^{-(i+1)}\right| = e^{-1} = \frac{1}{e}$ *c)* $\left|e^{-(i-1)}\right| = e^1 = e$

d) $\left|e^{(i-50)}\right| = e^{-50}$ *e)* $\left|e^{(1-50i)}\right| = e^1 = e$

Exercice 1. (Partie réelle et partie imaginaire)

Trouver la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

a) $(2-3i)(3+2i)$ b) $\dfrac{2-3i}{4-5i}$ c) $\left(\dfrac{1}{i}\right)^{4567}$

d) $(1+i\sqrt{3})^{10}$ e) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i}$ f) $\dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i}$

g) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i}$ h) $\dfrac{3i^{30} - i^{19}}{-1+2i}$ i) $\left(\dfrac{10-15i}{2+i}\right)\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right)$

Sol.: *Les résultats ci-après sont écrits sous la forme* $z = a + i\,b$ *, et on a* $\mathrm{Re}(z) = a$ *et* $\mathrm{Im}(z) = b$ *.*

a) $z = (2-3i)(3+2i) = 12 - 5i$

b) $z = \dfrac{2-3i}{4-5i} = \dfrac{2-3i}{4-5i}\,\dfrac{4+5i}{4+5i} = \dfrac{23}{41} - i\dfrac{2}{41}$

c) $z = \left(\dfrac{1}{i}\right)^{4567} = e^{i\frac{3\pi}{2}4567} = e^{i\frac{13701\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i = 0 + i$

d) On a que $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\!\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\!\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *. D'où*

$$\begin{aligned} z = (1+\sqrt{3}i)^{10} &= 2^{10}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} = 2^{10}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{10} \\ &= 2^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}} = 2^{10}e^{i\frac{4\pi}{3}} = -2^{10}e^{i\frac{\pi}{3}} = -2^{10}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \end{aligned}$$

et ainsi $\mathrm{Re}(z) = -2^9 = -512$ *et* $\mathrm{Im}(z) = -512\sqrt{3}$ *.*

e) $z = \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1+2i} + \dfrac{1}{1+3i} = \dfrac{1-i}{2} + \dfrac{1-2i}{5} + \dfrac{1-3i}{10} = \dfrac{4}{5} - i\,\dfrac{6}{5}$

f) $z = \dfrac{2-3i}{2+i} + \dfrac{1-i}{1+3i} = \dfrac{(2-3i)(2-i)}{5} + \dfrac{(1-i)(1-3i)}{10} = 0 - 2i$

g) $z = \dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{4+3i} = \dfrac{(5+5i)(3+4i)}{25} + \dfrac{20(4-3i)}{25} = 3 - i$

h) $z = \dfrac{3i^{30} - i^{19}}{-1+2i} = \dfrac{3i^2 - i^3}{-1+2i} = \dfrac{-3+i}{-1+2i} = \dfrac{3-i}{1-2i} = \dfrac{(3-i)(1+2i)}{5} = 1 + i$

i) $z = \left(\dfrac{10-15i}{2+i}\right)\left(\dfrac{1+i}{1-3i}\right) = (1-8i)\left(-\dfrac{1}{5} + i\,\dfrac{2}{5}\right) = 3 + 2i$

Exercice 2. (Module et argument)

Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants.

a) $2+2i$ b) $-1+i\sqrt{3}$ c) $-1+i\,\mathrm{tg}(3)$ d) $\dfrac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i}$ e) 2^i

Sol.:

Les résultats ci-dessous sont écrits sous la forme $z = \rho\, e^{i\varphi}$ *, et on a* $|z| = \rho$ *et* $\arg(z) = \varphi$ *.*

a) $z = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $z = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\!\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\!\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

c)

$$\begin{aligned} z = -1 + i\,\mathrm{tg}(3) = -1 + i\,\frac{\sin(3)}{\cos(3)} &= \frac{1}{|\cos(3)|}\Big(\cos(3) - i\sin(3)\Big) = \frac{1}{|\cos(3)|}\,e^{-3i} \\ &= \frac{1}{|\cos(3)|}\,e^{i(2\pi-3)} \end{aligned}$$

d) $$z = \frac{8i^{21} - 2i^{11}}{1-i} = \frac{8i - 2i^3}{1-i} = \frac{8i + 2i}{1-i} = 10i\,\frac{1}{1-i} = 10i\,\frac{1+i}{2} = 5\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 5\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

e) $z = 2^i = e^{i\,\mathrm{Log}(2)}$

Exercice 3. (Racines de nombres complexes)

Trouver toutes les solutions des équations suivantes dans $\mathbb{C}$,

a) $z^5 = 1$ b) $z^2 = -3 + 4i$ c) $z^4 = -2i$ d) $z^3 = -\sqrt{3} + i$

Représenter les résultats graphiquement.

Sol.:

a) On utilise que $1 = e^{i\,2\pi n}$ *pour* $n = 0, 1, 2, 3, 4$. *Les solutions recherchées sont donc* $z_{n+1} = e^{i\frac{2\pi n}{5}}$ *avec* $n = 0, 1, 2, 3, 4$ *(voir Fig. 1a).*

b) En écrivant $z = a + i\,b$, *l'équation donnée devient* $a^2 - b^2 + 2ab\,i = -3 + 4i$. *Puisque* a *et* b *sont réels, on doit résoudre le système d'équations*

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

La deuxième équation implique que a *et* b *sont non-nuls et donc* $b = \frac{2}{a}$. *En insérant ceci dans la première équation on obtient*

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

Puisque $a \in \mathbb{R}$, *seulement la première solution est possible ; on a donc* $a = \pm 1$ *et* $b = \pm 2$. *Ainsi les solutions de l'équation initiale sont* $z_1 = 1 + 2i$ *et* $z_2 = -1 - 2i$ *(voir Fig. 1b).*

c) On utilise que $-i = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)}$ *pour* $n = 0, 1, 2, 3$. *Les solutions recherchées sont donc* $z_{n+1} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n\right)}$ *avec* $n = 0, 1, 2, 3$ *(voir Fig. 1c).*

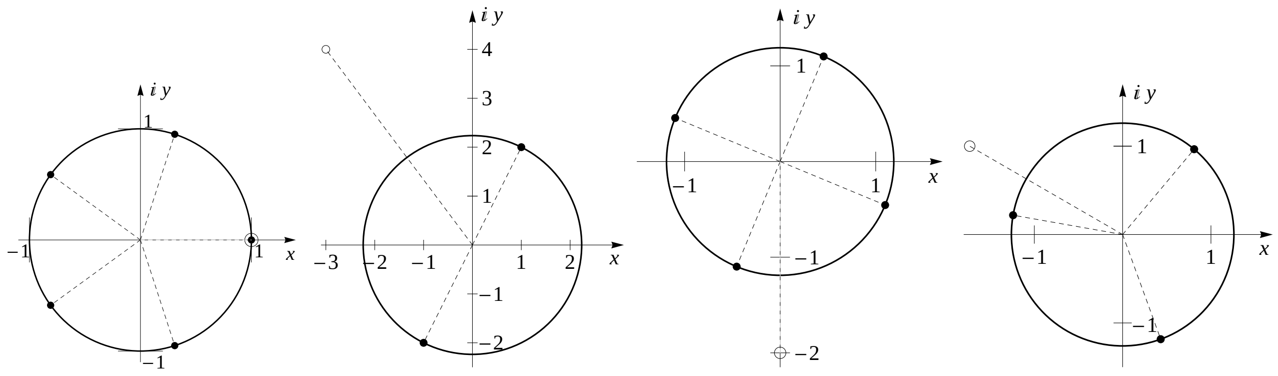
d) On a que $-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\, e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)}$ *pour* $n = 0, 1, 2$. *Les solutions recherchées sont donc* $z_{n+1} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n\right)}$ *avec* $n = 0, 1, 2$ *(voir Fig. 1d).*

Exercice 4. (Equations polynomiales)

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$ b) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

Sol.:



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 1 – Solution de l'exercice 3 (représentation graphique).

a) *Méthode 1 :* *On pose* $z = a + i\,b$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$ *qu'on met dans l'équation donnée :*

$$(a + i\,b)^2 + 6(a + i\,b) + 12 - 4i = 0,$$

d'où le système d'équations

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 6a + 12 = 0 \\ \qquad 2ab + 6b - 4 = 0\,. \end{cases}$$

De la première équation on obtient

$$a = -3 \pm \sqrt{b^2 - 3}\,,$$

et donc $|b| \geq \sqrt{3}$ *car* a *doit être réel. On peut alors récrire la deuxième équation du système comme*

$$a = \frac{2}{b} - 3$$

et on trouve

$$-3 \pm \sqrt{b^2 - 3} = \frac{2}{b} - 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \pm\sqrt{b^2 - 3} = \frac{2}{b}\ ,$$

d'où

$$b^2 - 3 = \frac{4}{b^2}\ ,$$

ou encore

$$(b^2)^2 - 3b^2 - 4 = (b^2 - 4)(b^2 + 1) = 0.$$

On a alors $b = \pm 2$ *car* b *doit être réel. Les solutions de l'équation initiale sont donc*

$$z_1 = -2 + 2i$$
$$z_2 = -4 - 2i.$$

Méthode 2 : *On utilise directement la formule pour l'équation quadratique vue au cours. Comme* $a = 1$, $b = 6$ *et* $c = 12 - 4i$, *on obtient*

$$z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 48 + 16i}}{2} = -3 \pm \sqrt{-3 + 4i}\ . \tag{1}$$

On remarque que la radicande est la même qu'à l'Ex. 3b) et donc la racine vaut $\pm(1+2i)$. *Puisqu'il y a déjà les deux signes dans* (1), *il suffit de considérer une seule racine (laquelle n'importe pas). Les solutions* (1) *sont alors*

$$z_1 = -3 + (1+2i) = -2 + 2i\,,$$
$$z_2 = -3 - (1+2i) = -4 - 2i\,.$$

b) L'équation donnée est équivalente à

$$(z^3 - 1)^2 = -1\,.$$

Puisque $-1 = e^{i\pi}$, *il suit que* $z^3 - 1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)}$ *avec* $n = 0,\, 1,$ *d'où*

$$z^3 = 1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\,.$$

Il faut alors résoudre les équations $z^3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ *et* $z^3 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ *en utilisant la même technique qu'aux Ex.* $3a, c, d$). *Les solutions sont*

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}\,, \qquad z_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}\,, \qquad z_3 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{17\pi}{12}}\,,$$
$$z_4 = \sqrt[6]{2}\, e^{-i\frac{\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{23\pi}{12}}\,, \qquad z_5 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}\,, \qquad z_6 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Exercice 5. (Encore une équation)

Trouver la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de tous les nombres complexes z qui satisfont l'équation

$$z^2 = \left(1 + \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^8.$$

Sol.: *Comme* $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, *on a*

$$1 + \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 + i\sqrt{3}\,,$$

qu'on récrit sous forme polaire :

$$1 + i\sqrt{3} = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}\,.$$

Ainsi l'équation devient

$$z^2 = \left(2\, e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^8 = 2^8\, e^{i\frac{8\pi}{3}} = 2^8\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\,.$$

Afin de résoudre cette équation, on écrit

$$z^2 = 2^8\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)}, \qquad \text{avec } n = 0,\, 1\,,$$

car une équation polynomiale du deuxième degré a deux solutions. Ces solutions sont donc

$$z_1 = 2^4\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 16\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 + i\,8\sqrt{3}\,,$$
$$z_2 = 2^4\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - i\,8\sqrt{3}\,.$$

Les quantités recherchées sont alors

$$\mathrm{Re}(z_1) = 8, \qquad \mathrm{Im}(z_1) = 8\sqrt{3}, \qquad |z_1| = 16, \qquad \arg(z_1) = \tfrac{\pi}{3}\,,$$
$$\mathrm{Re}(z_2) = -8, \qquad \mathrm{Im}(z_2) = -8\sqrt{3}, \qquad |z_2| = 16, \qquad \arg(z_2) = \tfrac{4\pi}{3}\,.$$

Exercice 6. (Décomposition d'un polynôme)

Décomposer le polynôme $z^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles complexes et en produit de facteurs irréductibles réels.

Sol.: *Pour la décomposition en facteurs irréductibles complexes il faut utiliser que* $-1 = e^{i(\pi+2\pi n)}$ *pour* $n = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5$. *Les racines complexes sont donc*

$$z_{n+1} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n\right)}, \qquad \textit{avec } \; n = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\,,$$

ce qui donne

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\,, \qquad z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = i\,, \qquad z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\,,$$
$$z_4 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}\,, \qquad z_5 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = -i\,, \qquad z_6 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}\right)} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}\,.$$

Ainsi

$$z^6 + 1 = \Big(z - \tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}\Big)\Big(z - i\Big)\Big(z + \tfrac{\sqrt{3}}{2} - i\tfrac{1}{2}\Big)\Big(z + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\Big)\Big(z + i\Big)\Big(z - \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\Big).$$

Puisque l'équation est à coefficients réels, ses racines complexes sont deux à deux complexes conjuguées : $z_1 = \overline{z_6}$, $z_2 = \overline{z_5}$ *et* $z_3 = \overline{z_4}$. *Pour tout nombre complexe* c *on a*

$$(z - c)(z - \bar{c}) = z^2 - (c + \bar{c})z + c\,\bar{c} = z^2 - 2\,\mathrm{Re}(c)z + |c|^2\,,$$

d'où on obtient

$$z^6 + 1 = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)\,.$$

Exercice 7. (Sous-ensembles de $\mathbb{C}$)

Démontrer l'égalité suivante :

$$\Big\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{z \in \mathbb{C} : \Big(z \neq 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0\Big) \text{ ou } |z| = 1\Big\}.$$

Sol. :

Pour caractériser l'ensemble $\Big\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\Big\}$, *on pose* $z = \rho e^{i\varphi}$ *avec* $\rho > 0$ *et* $\varphi \in [0, 2\pi[$. *La condition devient alors*

$$\rho^{i\varphi} + \frac{1}{\rho}e^{-i\varphi} \in \mathbb{R},$$

ou

$$\mathrm{Im}\Big(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}\Big) = \rho \sin(\varphi) - \frac{1}{\rho}\sin(\varphi) = 0.$$

Cette condition est satisfaite pour $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, ou $\rho = 1$ et φ arbitraire, donc pour les nombres de forme $z = \rho$, $z = -\rho$ et les nombres complexes de module égal à 1. L'ensemble $\Big\{z \in \mathbb{C} : \Big(z \neq 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0\Big) \text{ ou } |z| = 1\Big\}$ contient non seulement les nombres complexes z de module 1, mais aussi les nombres réels non-nuls qui correspondent aux nombres de la forme $z = \rho$ et $z = -\rho$ avec $\rho > 0$.

Exercice 8. (V/F :Nombres complexes)

Q1 : Le polynôme $z^2 + 1$ divise $z^6 + 3z^4 + z^2 - 1$.
VRAI. *Noter que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Comme $i^6 + 3i^4 + i^2 - 1 = -1 + 3 - 1 - 1 = 0$, $z - i$ divise le polynôme donné. Puisque ce dernier est à coefficients réels, il suit que $\bar{i} = -i$ en est aussi une racine et donc $z + i$ le divise aussi. Ainsi on conclut que $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ divise ce polynôme donné.*

Q2 : Soient $z_1, \ldots, z_n$ les racines complexes du polynôme $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ avec $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Alors on a $\prod_{j=1}^n z_j = (-1)^n a_0$.
VRAI. *Comme $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines du polynôme, on a*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

En comparant les termes de degré zéro des deux côtés de l'expression, on trouve la formule de l'énoncé.

Q3 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + i\sqrt{3})^n$ est un imaginaire pur (c'est-à-dire sa partie réelle est nulle).
FAUX. *On calcule la puissance en utilisant la forme polaire*

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n e^{in\pi/3} = 2^n\Big(\cos(n\pi/3) + i\sin(n\pi/3)\Big).$$

Ce nombre est un imaginaire pur si et seulement si $\cos(n\pi/3) = 0 \Leftrightarrow \Big(n\pi/3 = \pi/2 + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\Big) \Leftrightarrow \Big(n = 3/2 + 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\Big)$. Or, cette condition ne peut être satisfaite pour k entier.

Q4 : Il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 - i\sqrt{3})^n$ est réel.
VRAI. *En utilisant de nouveau la forme polaire on obtient*

$$(1 - i\sqrt{3})^n = 2^n e^{-in\pi/3} = 2^n\Big(\cos(n\pi/3) - i\sin(n\pi/3)\Big).$$

Ce nombre est réel si et seulement si $\sin(n\pi/3) = 0 \Leftrightarrow \Big(n\pi/3 = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\Big) \Leftrightarrow \Big(n = 3k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\Big)$. Ainsi on peut par exemple prendre $n = 3$.

Exercice 9. (QCM : Racines de nombres complexes)

L'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = \frac{(3+3i)^3}{2i+2}$ est

$\square\Big\{-3i, \dfrac{3}{2}(1+\sqrt{3}i), -\dfrac{3}{2}(1-\sqrt{3}i)\Big\}$ $\square\Big\{3i, \dfrac{3}{2}(1-\sqrt{3}i), -\dfrac{3}{2}(1+\sqrt{3}i)\Big\}$

$\blacksquare\Big\{-3i, \dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+i), -\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}-i)\Big\}$ $\square\Big\{3i, \dfrac{3}{2}(\sqrt{3}-i), -\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+i)\Big\}$

Sol. :
On a $2i+2 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ *et* $3+3i = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$*, et l'on en déduit* $\frac{(3+3i)^3}{2i+2} = 3^3 e^{3i\pi/4}e^{-i\pi/4} = 27e^{i\pi/2}$*. On applique ensuite la méthode du cours : les 3 solutions de l'équations* $z^3 = 27e^{i(\pi/2+2k\pi)}$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *sont données par* $z_k = 3e^{i\pi/6+2ik\pi/3}$ *avec* $k \in \{0,1,2\}$*. Autrement dit on a* $z_0 = 3e^{i\pi/6}$*,* $z_1 = 3e^{i5\pi/6}$ *et* $z_2 = 3e^{i3\pi/2}$*, ce qui correspond aux solutions ci-dessus écrites sous forme polaire.*