Par exemple, pour $n=2$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}$:

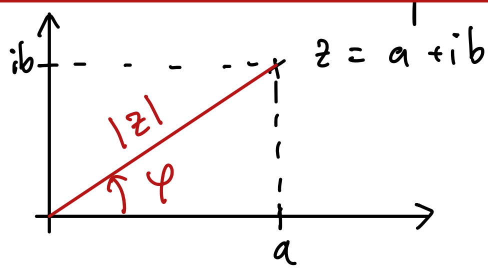
$$\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)^2 = \cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)$$
$$= \left(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2\right) + i\cdot\left(2\sin\varphi\cos\varphi\right)$$

On obtient : $\begin{cases} \cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2 \\ \sin(2\varphi) = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi . \end{cases}$

Remarque (conséquence de la formule d'Euler) : pour $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \operatorname{Re}(e^{i\varphi}) = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = \operatorname{Im}(e^{i\varphi}) = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

2.4 Forme polaire d'un nombre complexe



Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$) :

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = |z| \cdot \alpha \quad \text{avec } \alpha = \frac{z}{|z|} \text{ qui a pour module } 1$$
$$\left(\text{en effet } |\alpha| = \frac{|z|}{|z|} = 1\right).$$

Comme $|\alpha| = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

où φ est déterminé à $2k\pi$ près où $k \in \mathbb{Z}$.

Def : le nombre $\varphi \in]-\pi, \pi]$ est appellé l'argument de z, pour $z \in \mathbb{C}^*$
On note $\varphi = \arg(z)$

fin cours 09/10

Pour : $z \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\arg(z) = 0$
$z \in \mathbb{R}_-^*$, on a $\arg(z) = \pi$

$z = a + ib$ avec $a > 0$ on a

$$\arg(z) = \arctan(b/a) \quad \left(\text{c'est à dire } \tan\varphi = \frac{b}{a} \text{ et } \varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

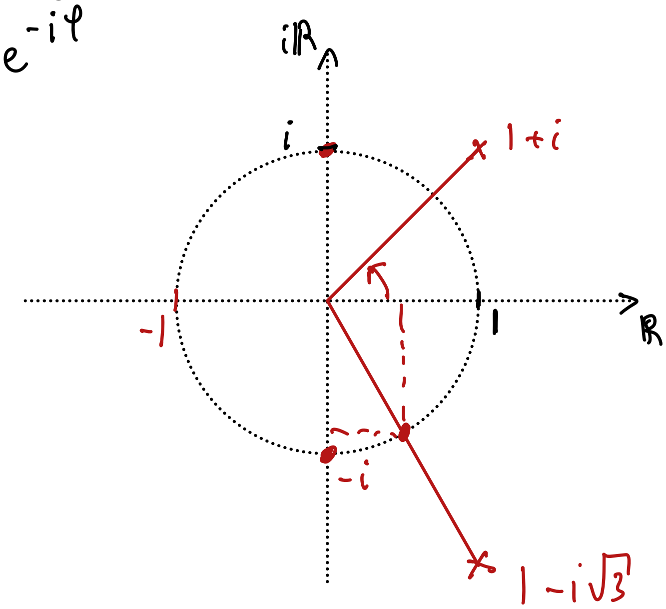
Forme polaire de $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: $z = \underbrace{|z|}_{\text{module de } z} e^{i\overbrace{\varphi}^{\text{argument de } z}}$

(**Produit**) Pour $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$ et $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$, on a

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(**Inverse**) Pour $z = re^{i\varphi}$ avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r^2} \cdot r \cdot e^{-i\varphi} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$



2.5 Exemples

1) $i = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
$= e^{i\pi/2}$

2) $-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$

3) $-i = 1 \cdot e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2}$

4) $1 + i = \underbrace{\sqrt{2}}_{=|1+i| = \sqrt{1^2+1^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$

5) $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i\pi/4}$ (en appliquant la formule de l'inverse).
(on peut aussi procéder en factorisant par le module...)

6) $1 - i\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \cdot \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}\right)$
$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot e^{-i\pi/3}$

7) $(1 - i\sqrt{3})^{30} = \left(2 e^{-i\pi/3}\right)^{30} = 2^{30} \cdot \underbrace{e^{-i \cdot \pi \cdot 10}}_{1} = 2^{30}$

2.6. Racines de nombres complexes

Prop: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $w \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe n nombres complexes distincts $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}^*$ tels que pour $k = 0, \dots, n-1$,

$$z_k^n = w$$

- Ces nombres sont appelés les racines n-ièmes de w.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $w = 0$, alors l'unique solution de $z^n = 0$ est 0.

Méthode de résolution à l'aide de l'écriture polaire :

(i) Ecrire w sous forme polaire : $w = |w| \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)}$ pour $k = 0, \dots, n-1$

(ii) Multiplier l'exposant par $\frac{1}{n}$: $z_k = |w|^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ pour $k = 0, \dots, n-1$

Exemples :

(1) Racines carrées de 1 : $z^2 = 1$ $(n = 2)$

(i) $1 = 1 \cdot e^{i(0 + 2k\pi)}$ pour $k = 0$ ou 1

(ii) $z_k = 1^{1/2} \cdot e^{ik\pi}$ pour $k = 0$ ou 1

Les 2 racines de 1 sont $1 \cdot e^{i0} = 1$ et $1 \cdot e^{i\pi} = -1$.

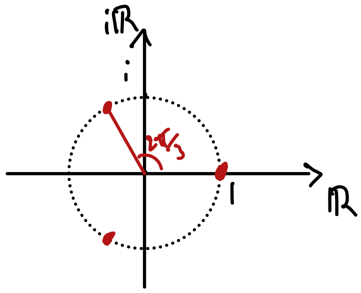
(2) Racines troisièmes de 1 : $z^3 = 1$ $(n = 3)$

(i) $1 = 1 \cdot e^{i(0 + 2k\pi)}$ pour $k = 0, 1, 2$

(ii) $z_k = 1^{1/3} \cdot e^{2ik\pi/3}$ pour $k = 0, 1, 2$

Les 3 racines cubiques de 1 dans $\mathbb{C}$ sont :

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{2i\pi/3}, \quad z_2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$$



(3) $z^6 = 1+i$

(i) $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i(\pi/4 + 2k\pi)}$, $k=0,\dots,5$

(ii) $z_k = 2^{1/12}\, e^{i(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3})}$, $k=0,\dots,5$

2.7. Racines de Polynômes complexes

Def : Un polynôme (complexe) est une fonction $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme suivante

$$P(z) = a_0 + a_1 \cdot z + \dots + a_n \cdot z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k \quad (\text{convention} : z^0 = 1)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

- On dit que ce polynôme est de degré n.
- Une racine $z \in \mathbb{C}$ de P est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

Prop : Si z_0 est une racine de P, alors $P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $n-1$. (admis).

Théorème fondamental de l'algèbre : Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré n.

Alors P est factorisable en produit de polynômes complexes de degré 1, c'est à dire que il existe $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ pas nécessairement distincts tels que

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \qquad \text{(admis)}$$

En particulier, $P(z_k) = 0$ pour $k = 1, \dots, n$.

Cas particulier explicite : polynômes de degré 2.

Prop : Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

Alors P admet 2 racines dans $\mathbb{C}$ (pas nécessairement distinctes) :

Pour $k = 0, 1$: $z_k = \dfrac{-b + w_k}{2a}$ avec w_k les racines carrées complexes de $b^2 - 4ac$ (distinctes si $b^2 - 4ac \neq 0$).

(si $z_1 = z_0$, $P(z) = a(z - z_0)^2$ et $z_0 = \frac{-b}{2a}$)

Preuve : $P(z) = a\,z^2 + b\,z + c$ $\quad (= a(z+y)^2 + y'$, trouver $y, y' \in \mathbb{C})$

$$= a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Donc $P(z) = 0 \iff a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}$

$$\iff \left[2a\left(z+\frac{b}{2a}\right)\right]^2 = b^2 - 4ac$$

$$\iff 2a\left(z+\frac{b}{2a}\right) = w_k \quad \text{pour } k=0 \text{ ou } k=1$$

$$\iff z = \frac{w_k}{2a} - \frac{b}{2a}, \quad k=0 \text{ ou } k=1 \qquad \blacksquare$$

Cas des polynômes à coefficients réels : Si $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ $(z \in \mathbb{C})$. Alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{P(z)} = P(\bar{z}) \qquad \left(\text{car } \overline{z^k} = (\bar{z})^k\right)$$

Donc si $P(z)=0$ alors $P(\bar{z}) = 0$

Donc les racines de P sont soit réelles, soit des paires $(z, \bar{z})$ de complexes conjugués.

Or on a $(z - z_k)(z - \bar{z}_k) = z^2 - (z_k + \bar{z}_k)\,z + z_k \cdot \bar{z}_k$

$$= z^2 - 2\underbrace{\mathrm{Re}(z_k)}_{\in \mathbb{R}} \cdot z + \underbrace{|z_k|^2}_{\in \mathbb{R}}$$

On en déduit (du thm. fondamental de l'algèbre) :

Prop : Tout polynôme à coefficients réels, est factorisable en produit de polynômes réels de degré 1 ou 2.

$\rightarrow$ les facteurs sont soit affines : $(z - z_k)$ avec $z_k \in \mathbb{R}$

soit quadratique : $(z^2 + bz + c)$ avec $b, c \in \mathbb{R}$.

(et $b^2 - 4c < 0$ car sinon on pourrait factoriser).

Fin cours 12/10