## Quelques exemples :

(1) $P(z) = z^2 - 2z + 1$

$\quad = (z-1)^2$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

(2) $P(z) = z^2 - 2$

$\quad = (z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2})$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

(3) $P(z) = z^3 - 1$ (racines troisièmes de 1 : $1,\ e^{2i\pi/3},\ e^{-2i\pi/3}$ )

$\quad = (z-1)(z-e^{2i\pi/3})(z-e^{-2i\pi/3})$ ← factorisation dans $\mathbb{C}$

$\quad = (z-1)\Big(z^2 - \big(\underbrace{e^{2i\pi/3} + e^{-2i\pi/3}}_{=2\times(-1/2)=-1}\big) z + \underbrace{e^{2i\pi/3} \cdot e^{-2i\pi/3}}_{=1}\Big)$

$\quad = (z-1)(z^2+z+1)$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$

(4) $P(z) = z^2 + z + 1$ (On pouvait aussi l'appliquer la formule pour les polynômes de degré 2.)

$\quad = (z-e^{2i\pi/3})(z-e^{-2i\pi/3})$

(5) $P(z) = z^4 - 1$

$\quad = (z^2-1)(z^2+1)$

$\quad = (z+1)(z-1)(z^2+1)$ ← factorisation dans $\mathbb{R}$.

$\quad = (z+1)(z-1)(z-i)(z+i)$ ← factorisation dans $\mathbb{C}$.

Une fois qu'on a trouvé des racines, on peut effectuer une division de polynômes pour trouver le facteur restant. Exemple :

$$p(x) = 2x^3 - 1 \quad \text{et} \quad q(x) = x+2$$

$$\begin{array}{r|l}
\boxed{2x^3} - 1 & \boxed{x} + 2 \\
\cline{2-2}
-2x^2(x+2) & 2x^2 - 4x + 8 \\
\cline{1-1}
-4x^2 - 1 & \\
-(-4x)(x+2) & \\
\cline{1-1}
8x - 1 & \\
-8\cdot(x+2) & \\
\cline{1-1}
-17 &
\end{array}$$

On a trouvé : $\quad 2x^3 - 1 = (x+2)\cdot(2x^2-4x+8) - 17$

# Chapitre 3 : Suites Réelles

## 3.1 Définition et propriétés élémentaires

**Def :** Une suite réelle est une fonction $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
On écrit $a_n = a(n)$ pour un terme de la suite
On écrit $(a_n)$ ou $(a_n)_{n \geq 0}$ pour désigner la suite elle-même.

**Exemples :**

- Suite harmonique $(x_n)_{n \geq 1}$ donnée par $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- Suite harmonique alternée $(x_n)_{n \geq 1}$ donnée par $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

On a : $a_1 = \frac{(-1)^2}{1} = 1$ , $a_2 = \frac{-1}{2}$ , $a_3 = \frac{1}{3}$ , ...

- Suite constante : $(x_n)_{n \geq 0}$ donnée par $x_n = 7$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Suite des nombres premiers : $x_n$ est le n-ième nombre premier
  $x_1 = 2$ , $x_2 = 3$ , $x_3 = 5$ , $x_4 = 7$ , $x_5 = 11$ , ...

**Def :** Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite. On dit que $(x_n)$ est :

- croissante si $\forall n \in \mathbb{N}$ , $x_{n+1} \geq x_n$
- strictement croissante ———— $x_{n+1} > x_n$
- décroissante ———— $x_{n+1} \leq x_n$
- strictement décroissante ———— $x_{n+1} < x_n$
- (strictement) monotone si elle est, soit (strictement) croissante, soit (strictement) décroissante
- majorée si $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq c$
- minorée si $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq c$

- bornée si elle est majorée <u>et</u> minorée.

<u>Proposition</u> : Une suite est bornée ssi $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq c$.

<u>Exemple</u> : $(x_n)$ définie par $x_n = \frac{(-1)^n}{1+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

On a $|x_n| = \frac{1}{1+n} \leq 1$ , $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc $(x_n)$ est bornée (prendre $c = 1$ dans la proposition ci-dessus).

## 3.2 Limite de suite

<u>Def</u> : Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $\ell$ est la limite de $(x_n)$ [ou que $(x_n)$ converge vers $\ell$] ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad |x_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$ et on dit que $(x_n)$ converge / est convergente.

<u>Exemple</u> : Soit $(x_n)$ définie par $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $N \in \mathbb{N}$ t.q $\forall n \geq N$, $|x_n - 1| \leq \varepsilon$.

On veut $\frac{1}{N^2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

On a $|x_n - 1| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Prenons $N \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ et alors

$\forall n \geq N$, on a $|x_n - 1| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} \leq \varepsilon$. Ceci montre que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 1. \qquad \blacksquare$$

<u>Prop</u> : Si une suite converge, alors sa limite est unique. (admis)

**Prop :** Toute suite convergente est bornée.

**Preuve :** Soit $(a_n)$ une suite convergente et $\ell$ sa limite.

Prenons, $\varepsilon = 1$ (par exemple), dans la définition de la limite, On a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |a_n - \ell| \leq 1$$

Donc $\forall n \geq N$, on a $|a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq |a_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$

Soit $c = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|, 1 + |\ell|\}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$ donc la suite est bornée. ∎

**Notation :** $\inf(x_n) = \inf\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$

$\sup(x_n) = \sup\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

## 3.3 Suites divergentes.

**Def :** Si $(x_n)$ ne converge pas, on dit que $(x_n)$ diverge / est divergente.

c'est-à-dire : $\forall \ell \in \mathbb{R}$, non $(\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |x_n - \ell| \leq \varepsilon)$

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - \ell| > \varepsilon$$

**Limite infinies :**

**Def :** Soit $(x_n)$ une suite. On dit que :

- $(x_n)$ tend vers $+\infty$ si :
  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, on a $x_n \geq M$
  on note $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

- $(x_n)$ tend vers $-\infty$ si :
  $\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$, on a $x_n \leq m$
  on note $\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty$ (ou bien $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$)

## 3.4 Opérations sur les limites

Si $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ et $\lim_{n \to +\infty} b_n = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$

(iii) $\lim_{n \to +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iv) $\lim_{n \to +\infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$ **si** $b \neq 0$

fin cours 16/10