

Analyse I – Série 5

Echauffement. (Infimum, Supremum)

Soit $a_n = \frac{5n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Soit $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Calculer

a) $\inf A$

b) $\sup A$

Sol.:

a) Afin de trouver $\inf A$, il suffit de remarquer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5(n+1)}{2(n+1)+1} - \frac{5n}{2n+1} = \frac{(5n+5)(2n+1) - 5n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{5}{(2n+1)(2n+3)} \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\inf A = \min a_n = a_0 = 0$.

b) Afin de trouver $\sup A$, nous pouvons remarquer que

$$a_n = \frac{\frac{5}{2}(2n+1) - \frac{5}{2}}{2n+1} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2n+1)} \leq \frac{5}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et donc $a = \frac{5}{2}$ est un majorant de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il reste à montrer que $a = \frac{5}{2}$ est le plus petit des majorants, c.-à.-d. $\forall \varepsilon > 0$, il faut trouver n_0 tel que $a_{n_0} > a - \varepsilon$. Donc il faut trouver n_0 tel que

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - \frac{5}{2(2n_0+1)} > \frac{5}{2} - \varepsilon &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{2(2n_0+1)} \Leftrightarrow \frac{2}{5}\varepsilon > \frac{1}{2n_0+1} \Leftrightarrow 2n_0+1 > \frac{5}{2\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow n_0 > \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2\varepsilon} - 1 \right). \end{aligned}$$

Puisque le sous-ensemble des nombres naturels n'est pas majoré, on peut toujours trouver un tel $n_0 \in \mathbb{N}$. Par exemple, on peut choisir

$$n_0 = \max \left\{ 0, \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2\varepsilon} - 1 \right) \right\rfloor + 1 \right\}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x . Alors pour tout $n > n_0$ on a l'inégalité $a_n > a - \varepsilon$, ce qui montre que

$$\sup A = \frac{5}{2}.$$

Exercice 1. (Définition de la limite)

Soit (u_n) une suite de réels positifs vérifiant $u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$ pour tous $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Démontrer que (u_n) tend vers 0.

Sol. :

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_k$ tend vers 0, on peut trouver un entier K tel que $\frac{1}{K} \leq \varepsilon$. On en déduit que, pour tout entier n , on a $0 \leq u_n \leq \varepsilon + \frac{K}{n}$. Or, la suite $\left(\frac{K}{n}\right)_n$ tend vers 0, et on peut trouver un entier N tel que, pour $n \geq N$, on a $\frac{K}{n} \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout entier $n \geq N$, on a prouvé que

$$0 \leq u_n \leq 2\varepsilon$$

Cela montre que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 2. (Critères de convergence, cours)

- (i) Montrer que toute suite convergente est bornée (sans regarder la preuve du cours!).
- (ii) Soit (a_n) une suite. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ alors la suite est divergente.

Sol. :

(i) Vous pouvez maintenant regarder la preuve du cours.

(ii) (Démonstration par l'absurde). Supposons que la suite (a_n) est convergente, alors par (i) il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$. Soit $r > c$, alors si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq n_0$, $a_n \geq r$, en contradiction avec le fait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$.

Exercice 3. (Lois algébriques, cours)

Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Sol. :

L'hypothèse $b \neq 0$ implique qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_1$, $|b_n - b| \leq \frac{1}{2}|b|$ et donc $\forall n \geq n_1$,

$$\frac{1}{|b_n|} = \frac{1}{|b + b_n - b|} \leq \frac{1}{||b| - |b_n - b||} \leq \frac{1}{|b| - |b|/2} = \frac{2}{|b|}.$$

On a

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} \right| = \frac{|(a_n - a)b - (b_n - b)a|}{|b_n||b|} \leq \frac{2}{|b|} |a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2} |b_n - b|.$$

Or $\forall \varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq n_1$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$\frac{2}{|b|} |a_n - a| \leq \frac{2}{\varepsilon} \qquad \frac{2|a|}{|b|^2} |b_n - b| \leq \frac{2}{\varepsilon},$$

et donc $\forall n \geq n_0$, $\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \varepsilon$.

Exercice 4. (Propriétés algébriques de la limite)

Soit $a_n = \frac{3n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n} \right)$

Sol.:

a) La suite est croissante et bornée et on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+2} = \text{Sup}\{a_1, a_2, \dots\} = 3.$$

On peut aussi utiliser les propriétés algébriques de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{3}{1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{3}{1 + 2 \cdot 0} = 3.$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{3} + \frac{3}{a_n} \right) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \frac{3}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{3}{3} = 2$

Intermezzo.

Les informations suivantes seront utiles pour les exercices qui suivent :

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$, pour tout $p > 0$.
- 2) $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$, pour tout $x \geq 0$.
- 3) $1+x \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$, pour $-1 \leq x \leq 0$.

Démonstration :

- 1) Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n^p} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. On peut par exemple choisir

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \right\rceil + 1 \geq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}},$$

car on trouve pour $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n_0^p} \leq \varepsilon.$$

- 2) Pour $x \geq 0$ on a

$$1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1+x + \frac{1}{4}x^2} = 1 + \frac{1}{2}x.$$

- 3) Pour $-1 \leq x \leq 0$ on a $0 \leq 1+x \leq 1$ et donc $(1+x)^2 \leq 1+x$. Donc

$$1+x \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1+x + \frac{1}{4}x^2} = 1 + \frac{1}{2}x.$$

Exercice 5. (Existence de limites)

Déterminer, si elle existe, la limite $n \rightarrow \infty$ de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ avec

$$\text{a) } a_n = \frac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7} \quad \text{b) } a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{c) } a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{2n}$$

Indication: Pour c), on pourra utiliser (après l'avoir démontrée) l'inégalité suivante : $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} \forall x \geq 0$.

Sol.:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 2}{3n^2 + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{7}{n^2}} = \frac{5 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{3 + 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{5}{3}$$

b) On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{(\frac{1}{4} - \frac{1}{3})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{12}}} = 0,$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

c) On a

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} \leq 1 + \frac{1}{n^2} \quad \xrightarrow{[Th2G]} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = 1,$$

où [Th2G] dénote « par le théorème des deux gendarmes ». Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Remarque :

Nous allons voir plus tard que l'on peut « échanger » la racine et la limite, ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}}{2n} = \frac{\sqrt{1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6. (Propriétés des suites)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (a_n) est monotone; trouver, s'il existe, le supremum et l'infimum de la suite et décider s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$$\text{a) } a_n = n^2 - 4n + 1, n \in \mathbb{N} \quad \text{b) } a_n = \frac{n}{3n - 1}, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{c) } a_n = \frac{n}{3n - 1}, n \in \mathbb{N}$$

Sol.:

a) On a $a_n = (n - 2)^2 - 3$. Calculons les premiers termes de la suite :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = -3, \quad a_3 = -2, \dots$$

La suite n'est donc pas monotone car par exemple $a_1 > a_2$ et $a_2 < a_3$. Pour $n \geq 2$, on a par contre

$$a_n = (n - 2)^2 - 3 \leq (n - 1)^2 - 3 = a_{n+1},$$

c.-à.-d. la suite est croissante pour $n \geq 2$.

Donc on a

$$\text{Inf } a_n = \min a_n = -3.$$

Pour $n \geq 2$ on a

$$a_{n+1} - a_n = (n - 1)^2 - (n - 2)^2 > 1,$$

alors la suite $\{a_n\}$ croît plus vite que les nombres naturels, et donc $\{a_n\}$ n'est pas majoré. Ainsi $\text{Sup}(a_n)$ et a fortiori $\max(a_n)$ n'existent pas.

b) On a

$$a_n = \frac{n}{3n - 1} = \frac{\frac{1}{3}(3n - 1) + \frac{1}{3}}{3n - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n - 1)}$$

On procède ensuite comme dans l'exercice précédent pour montrer que la suite est décroissante :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{3(3(n+1) - 1)} - \frac{1}{3(3n - 1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{3n - 1 - (3n + 2)}{(3n + 2)(3n - 1)} \right) \\ &= -\frac{1}{(3n + 2)(3n - 1)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Il s'en suit que $\text{Sup } a_n = \max a_n = a_1 = \frac{1}{2}$. De plus on a vu que

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n - 1)},$$

donc (a_n) est minorée par $a = \frac{1}{3}$. Pour montrer que a est le plus grand minorant de (a_n) , il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{n_0} < a + \varepsilon$, où $a = \frac{1}{3}$. On écrit

$$a_{n_0} < \frac{1}{3} + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3(3n_0 - 1)} < \frac{1}{3} + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 3n_0 - 1 > \frac{1}{3\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n_0 > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}.$$

En prenant n_0 entier tel que

$$n_0 > \frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3},$$

on a

$$a_{n_0} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(3\left(\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{1}{3}\right) - 1\right)} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(\frac{1}{3\varepsilon}\right)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{3} + \varepsilon$$

et donc

$$\text{Inf } a_n = \frac{1}{3}.$$

Notons encore que $\min(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'existe pas.

c) Même question qu'en ii) sauf que l'on étudie ici $\{a_0 \cup (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\}$.

Comme $a_0 = 0$, on a $\min (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = 0 = \min (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

De plus, la suite (a_n) perd sa monotonie puisque $a_0 < a_1$ et $a_1 > a_2$.

Enfin, l'on a toujours $\text{Sup } a_n = \max a_n = a_1 = \frac{1}{2}$.

Exercice 7. (Calcul de limites)

Calculer la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ avec

a) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ b) $a_n = \frac{n!}{n^n}$ c) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Indication : pour a), vous pouvez multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{n+2} + \sqrt{n}$ (c'est une astuce classique à maîtriser!).

Sol.:

a) On a

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \leq \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

d'où $0 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, et par le théorème des deux gendarmes on obtient que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) On a

$$0 \leq a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{3}{n}\right) \cdots \left(\frac{n}{n}\right) \leq \frac{1}{n},$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ par le théorème des deux gendarmes.

c) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$ on a

$$\frac{2}{m} \leq 1,$$

et donc

$$0 \leq a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-2} \cdots \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \leq \frac{2}{n} \cdot 2,$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ avec le théorème des deux gendarmes.

Exercice 8. (*) (Fonction exponentielle)

À partir de la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (admise), calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

Sol.: Rappelons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Alors

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right) = e^2$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \right) = \frac{1}{e}$.
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) = 1$.

Exercice 9. (Croissance)

Pour chaque suite ci-dessous étudier sa croissance (c'est-à-dire, dire si elle est (strictement) croissante ou décroissante ou ni l'un ni l'autre). Pour les suites dépendant d'un paramètre, discuter des différents cas possibles.

- a) $x_n = n^2 + 3n + 2$
 b) $x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
 c) $x_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$
 d) $x_n = r^n$ (suite géométrique de raison $r \in \mathbb{R}$)
 e) $x_n = nr + b$ (suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ avec $b \in \mathbb{R}$)
 f) x_n définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n - 3}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 g) x_n définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2\sqrt{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sol.:

- a) Cette suite est strictement croissante. En effet $x_n = (n+1)(n+2)$ et donc $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+3}{n+1} > 1$.
- b) Cette suite n'est ni croissante ni décroissante.
- c) On regarde $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{3}{2} > 1$. Donc cette suite est strictement croissante.
- d) Si $r < 0$ alors la suite n'est ni croissante ni décroissante. Si $r = 0$ la suite est constante. Si $0 < r < 1$ alors la suite est strictement décroissante. Si $r = 1$ la suite est constante. Si $r > 1$ alors la suite est strictement croissante.
- e) Si $r = 0$ alors la suite est constante. Si $r < 0$ la suite est strictement décroissante et si $r > 0$ alors elle est strictement croissante.
- f) Commençons par observer que $x_n > -3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, c'est vrai pour $n = 0$ car $x_0 = 1$. Supposons l'assertion vraie pour n et montrons-la pour $n+1$. On a que $x_{n+1} = \frac{x_n - 3}{2} > \frac{-3 - 3}{2} = -3$. Étudions à présent la différence $x_{n+1} - x_n$. Un calcul nous donne

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n - 3}{2} - \frac{2x_n}{2} = -\frac{x_n + 3}{2}$$

Comme $x_n > -3$ on a que $x_n + 3 > 0$ et par conséquent $x_{n+1} - x_n < 0$. Donc cette suite est strictement décroissante.

- g) On calcule $x_{n+1} - x_n$ et on trouve $\frac{x_n^2 + 2}{2\sqrt{2}} - x_n = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{2}x_n + 2}{2\sqrt{2}} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \geq 0$. Ceci montre que la suite est croissante. On peut montrer de plus que $x_n < \sqrt{2}$ (par récurrence) et donc $x_{n+1} - x_n > 0$ signifiant que la suite est strictement croissante.

Exercice 10. (V/F : suites)

Répondre par VRAI si l'affirmation est toujours vraie ou par FAUX si elle n'est pas toujours vraie. Soit (a_n) une suite numérique.

Q1 : Si (a_n) est bornée, alors (a_n) converge.

FAUX : $a_n = (-1)^n$ est un contre-exemple.

Q2 : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \sin(n)) = 0$.

VRAI : Comme $|\sin(n)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq |a_n \sin(n)| = |a_n| \cdot |\sin(n)| \leq |a_n|,$$

ou

$$-|a_n| \leq a_n \sin(n) \leq |a_n|. \quad (1)$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, la suite des valeurs absolues $(|a_n|)$ converge aussi vers 0. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors par la convergence de (a_n) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

pour tout $n \geq n_0$, ce qui établit que $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ également. Par le théorème des deux gendarmes appliqué à (1) on conclut alors que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \sin(n)) = 0$.

Q3 : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, alors (a_n) diverge.

FAUX : $a_n = 1$ est un contre-exemple ($a_n = 1/n$ en est un autre).

Q4 : Si (a_n) converge, alors il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

VRAI : Comme (a_n) converge, elle est bornée. Ainsi $\text{Sup}A < \infty$ où $A = \{|a_0|, |a_1|, \dots\}$, si bien que l'énoncé est vrai en prenant par exemple $\varepsilon = 1 + \text{Sup}A$.

Q5 : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $|a_n - a| \leq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

VRAI Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$. Ainsi la suite (b_n) définie par $b_n = a_n - a$ est bornée. En appliquant le raisonnement de la question précédente à la suite (b_n) , on a le résultat voulu.

Exercice 11. (Suites adjacentes) Considérons les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ définies par

$$u_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

Montrer que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante et que $(u_n - v_n)$ tend vers 0. En déduire que la suite (u_n) converge (on pourra faire appel à un théorème du cours). (Nous verrons plus tard que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \exp(1)$.)

Solution.

La suite (u_n) est (strictement) croissante car $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. La suite (v_n) est (strictement) décroissante car

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par ailleurs $v_n - u_n = 1/(nn!)$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n!) = 0$. Par le théorème des suites adjacentes, il s'ensuit que (u_n) converge.