3.4 Opérations sur les limites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$

fin cours 16/10

Preuve pour (i). (les autres : en exercice). On suppose $\alpha, \beta \neq 0$

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha \cdot a + \beta \cdot b)| \overset{\text{inégalité triangulaire}}{\leqslant} |\alpha(a_n - a)| + |\beta(b_n - b)|$

$\leqslant |\alpha| \cdot |a_n - a| + |\beta| \cdot |b_n - b|$

Soit $\varepsilon > 0$, on a que :

$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_1, \quad |a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \cdot |\alpha|}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N_2, \quad |b_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \cdot |\beta|}$

Soit $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. On a que :

$\forall n \geqslant N_3, \quad |\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha a + \beta b)| \leqslant |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Ceci montre $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha a + \beta b$. (le cas $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ se traite de façon similaire) ■

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2 + 3/n}{3 - 1/n} \overset{\text{(iii) de la proposition}}{=} \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + 3/n}{\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - 1/n}$

$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + 3\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n}{\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \lim\limits_{n\to+\infty} 1/n}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ car, étant donné $\varepsilon > 0$, prenons $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, alors on a $\forall n \geqslant N$, $\left|\frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$ la limite est non-nulle donc (iii) s'applique bien.

→ Cette technique se généralise à tout ratio de polynôme.

⚠ Bien vérifier les hypothèses :

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} \neq \frac{\lim_{n\to+\infty} n}{\lim_{n\to+\infty} n} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{forme indéterminée}$$

<u>À savoir</u> : $\forall p > 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ $\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$

3.5 Critères de convergence

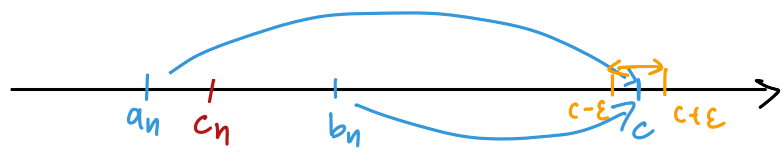
<u>Thm.</u> (Théorème des gendarmes). Soit $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ des suites.

Si :

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\quad a_n \leq c_n \leq b_n$
- $\lim_{n\to+\infty} a_n \overset{\text{existe}}{=} c$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n \overset{\text{existe}}{=} c$ avec $c \in \mathbb{R}$

Alors $\lim_{n\to+\infty} c_n \overset{\text{existe}}{=} c$.

<u>Preuve</u> :



- On a $\forall n \geq n_0$, $\quad a_n - c \leq c_n - c \leq b_n - c$
- Soit $\varepsilon > 0$. On a que : $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$ $\quad |a_n - c| \overset{(i)}{\leq} \varepsilon$

  $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_2$ $\quad |b_n - c| \overset{(ii)}{\leq} \varepsilon$

Prenons $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. On a $\forall n \geq n_3$,

$$-\varepsilon \overset{(i)}{\leq} a_n - c \leq c_n - c \leq b_n - c \overset{(ii)}{\leq} \varepsilon \implies |c_n - c| \leq \varepsilon$$

Ceci montre que $\lim_{n\to+\infty} c_n = c$. ∎

Rappel : $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$

↳ Si $x \geq 0$ alors $x \leq \varepsilon$

Si $x \leq 0$ alors $-x \leq \varepsilon \iff x \geq -\varepsilon$

Exemple :

$$\underset{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ 0}}{\overset{a_n}{\frac{-1}{1+n^2}}} \leqslant \underset{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ 0}}{\overset{c_n}{\frac{\cos(\sqrt{n}+3n^3)}{1+n^2}}} \leqslant \underset{\substack{\downarrow n\to+\infty \\ 0}}{\overset{b_n}{\frac{1}{1+n^2}}}$$

Par le Thm. des gendarmes.

Thm (Thm de convergence monotone). Toute suite $(a_n)_{n\geqslant}$ croissante et majorée (respectivement, décroissante et minorée) converge et sa limite est $a = \sup(a_n) = \sup\{a_i,\ i\in\mathbb{N}\}$.

$(\text{resp, } a = \inf(a_n) = \inf\{a_i\ ;\ i\in\mathbb{N}\})$.

Preuve : Soit $a = \sup(a_n) < +\infty$ car (a_n) majorée. On a :

- $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n \leqslant a$
- $\forall \varepsilon>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\quad a_{n_0} \geqslant a-\varepsilon$ } propriétés du sup.
- $\forall n\geqslant n_0,\quad a_n \geqslant a_{n_0}$ (croissance).

On en déduit $\forall n \geqslant n_0,\quad a-\varepsilon \leqslant a_n \leqslant a\ (+\varepsilon) \Rightarrow -\varepsilon \leqslant a_n - a \leqslant \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - a| \leqslant \varepsilon$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ ∎

Exemple : $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ définie par $n\geqslant 1$ $\left(a_1 = 1,\ a_2 = 1+\frac{1}{2^2} = \frac{5}{4},\ a_3 = \dots\right)$

- On a $\forall n\geqslant 1,\quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ donc $(a_n)_n$ est (strictement) croissante.
- Montrons que (a_n) est majorée (astuce) :

$$a_n \leqslant a_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{2n+1}\frac{1}{k^2} = 1 + \overbrace{\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{(2\ell)^2}}^{\text{termes d'indice pairs}} + \underbrace{\overbrace{\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{(2\ell+1)^2}}^{\text{impairs.}}}_{\leqslant \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{(2\ell)^2}}$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{4}\overbrace{\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^2}}^{a_n} + \frac{1}{4}\overbrace{\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^2}}^{a_n} = 1 + \frac{a_n}{2}$$

Ainsi $a_n \leqslant 1 + \frac{a_n}{2} \Rightarrow \frac{a_n}{2} \leqslant 1 \Rightarrow a_n \leqslant 2$. (cette technique fonctionne pour $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ avec $p>1$)

Donc (a_n) est croissante et majorée donc elle converge.
(en fait la limite est $\frac{\pi^2}{6}$, mais nous ne l'avons pas montré).

Thm. (Critère de D'Alembert pour les suites). Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite telle que $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$: alors (x_n) converge vers 0.
- Si $\ell > 1$: alors (x_n) diverge
- Si $\ell = 1$: alors on ne peut rien conclure.

Exemple : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et (x_n) définie par $x_n = \frac{\alpha^n}{n!}$

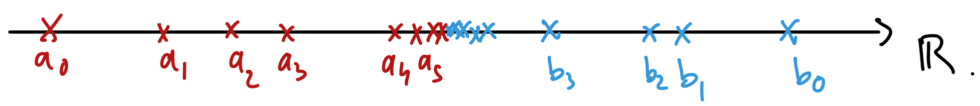
On a $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|\alpha|^n} = \frac{|\alpha|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\quad\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|\alpha|}{n+1} = |\alpha|\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0\right)$

Par le critère de D'Alembert (x_n) converge vers 0.

Détail : $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{(n+1)\cdot\cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = \frac{1}{n+1}$

Thm (Suites adjacentes). Soit (a_n) une suite croissante et (b_n) une suite décroissante, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.
Alors (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

Preuve :



La suite $(b_n - a_n)$ est décroissante (somme de (b_n) et $(-a_n)$ 2 suites décroissantes).
Comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$ alors $b_n - a_n \overset{(i)}{\geq} 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a donc $a_0 \leq a_n \overset{(i)}{\leq} b_n \leq b_0$

Donc par le critère de convergence monotone, $\begin{cases} (a_n) \text{ croissante majorée : converge.} \\ (b_n) \text{ décroissante minorée : converge.} \end{cases}$

Notons $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$.

On a $0 = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n = b - a$

Ainsi $a = b$. ■

fin cours 19/10