Série 07 : Energie, moment cinétique, gravitation

Question conceptuelle

a) Pourquoi la Lune ne tombe pas sur la Terre comme le fait une pomme qui se détache d'un arbre ?

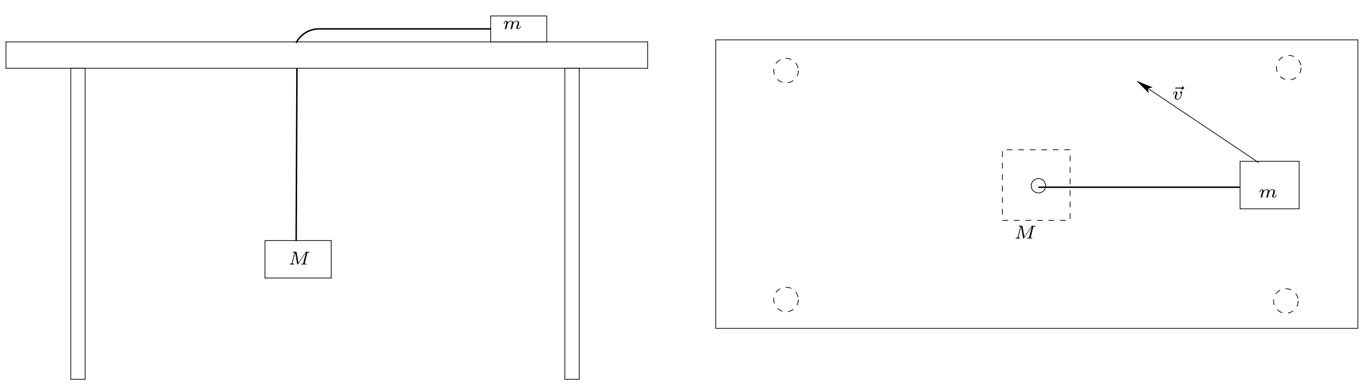
1 La table à trou

Soit une table horizontale percée d'un trou dans lequel peut circuler sans frottement un fil sans masse de longueur L. Le fil relie deux blocs, soumis à la pesanteur : 1) le bloc de masse m qui glisse sans frottement sur la table et possède une vitesse initiale qui n'est pas dans la direction du fil et 2) le bloc de masse M qui pend verticalement sous la table. Le fil reste tendu en tout temps.

a) Ecrire l'énergie mécanique totale des deux blocs en tenant compte de la longueur constante du fil. Indication : bien réfléchir à quel système de coordonnées employer.

b) Quelles sont les grandeurs conservées, c'est-à-dire les intégrales premières du mouvement ? Indication : considérer le moment cinétique de chacun des masses.

c) Ecrire les équations du mouvement des deux blocs
— à partir des intégrales premières du mouvement ;
— à partir de la deuxième loi de Newton.



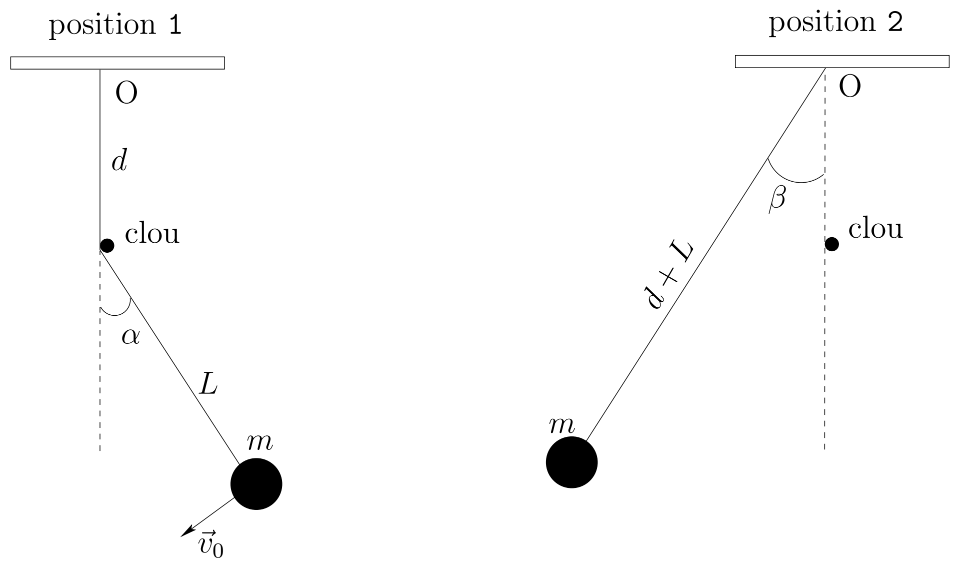
Vue de côté Vue de dessus

2 Le pendule asymétrique

Un pendule consiste en une bille de masse m reliée à un point fixe O par un fil sans masse de longueur constante. Un clou est placé à une distance d à la verticale sous le point O, de sorte que le pendule a une longueur L quand il oscille d'un côté de la verticale et une longueur $d+L$ de l'autre côté (voir dessin). On place la bille afin que le fil soit incliné d'un angle α ($\alpha < \pi/2$) avec la verticale du côté court du pendule (position 1), et on la lance avec une vitesse v_0. Au cours de son mouvement, considéré sans frottements, le fil reste toujours tendu. L'angle du pendule par rapport à la verticale atteint la valeur maximale β du côté long (position 2).

a) Quelle doit être la vitesse v_0 pour que l'angle β soit égal à l'angle α ?

b) Quelle est alors la vitesse maximale atteinte par la bille ?



3 Chute libre près de la Terre

Sur la Terre, de rayon R_T et de masse M_T, une bille de masse m est lâchée sans vitesse initiale depuis une hauteur $z(t = 0) = H$ au-dessus du niveau du sol. La force gravitationnelle qui s'exerce sur la bille est donnée par la loi de la gravitation universelle. On néglige les frottements de l'air.

a) Ecrire l'équation du mouvement de la bille.

b) Donner l'expression de l'énergie mécanique. Quelle est sa valeur à l'instant initial ?

c) Quelle est la vitesse de la bille quand elle arrive au niveau du sol ?

d) *(facultatif)* Calculer la différence relative $(\Delta v/v)$ de cette vitesse avec la vitesse que vous auriez obtenue en utilisant une accélération gravitationnelle constante $g = GM_T/R_T^2$.
Indication : $(1 + \epsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\epsilon$, pour $\epsilon \ll 1$.
Application numérique : $h = 1000$ m, $R_T = 6371$ km, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}, masse terrestre : $M_T = 5.9 \cdot 10^{24}$ kg.

Exercices facultatifs : compléments de cours

a) Nous allons montrer que le potentiel associé à une force centrale conservative ne dépend que de r.
   1) Rappeler la forme que prend $\vec{F}$ si il s'agit d'une force centrale.
   2) Montrer que, pour tout potentiel $V(\vec{r})$, $\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla}V.\vec{v}(t)$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse.
   3) En déduire l'expression du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques. Suggestion : écrire $\frac{d}{dt}V(...)$ de deux facons différentes, avec ... les coordonnées en question.
   4) En utilisant les coordonnées sphériques, conclure sur les propriétés de V découlant d'une force centrale et conservative.

b) Nous allons ici montrer la loi des aires de Kepler dans le cas d'un mouvement général.
   1) Rappel de mathématiques. On considère un parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Montrer que l'aire du parallélograme est égale à $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$.

2) À l'aide d'un dessin, justifier que l'aire A balayée par $\vec{OM}$ pendant un temps $\delta t \ll 1$ est égal à $\frac{1}{2}||\vec{r} \wedge \delta\vec{r}||$, avec $\delta\vec{r} = \vec{r(t+\delta t)} - \vec{r}(t)$.
3) En déduire que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

4) Application numérique de la loi des aires : donner une ordre de grandeur de la masse du Soleil en considérant que la Terre à une orbite circulaire de rayon R. Comparer avec sa masse estimée sur wikipedia.
Données : $R \approx 150 \times 10^6$km, $G = 6.67 \times 10^{-11}$N.m^2.kg^{-2}.

c) Dans cette question, nous allons utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour dériver l'expression de la période des oscillations autour d'un minimum de l'énergie potentielle pour un potentiel arbitraire.
1) On considère une particule dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$. En utilisant la conservation de l'énergie, vérifier que

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{E - V(x)}}$$

est une constante qui ne dépend pas du temps. Déterminer cette constante.
2) On considère une particule allant du point x_1 au point x_2. En utilisant la question précédente, montrer que le temps Δt mis par la particule pour faire ce trajet est

$$\Delta t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

3) Donner une condition simple sur $V(x_1)$ et $V(x_2)$ pour que la particule puisse osciller entre ces deux positions. Donner l'expression de la période de ces oscillations. On ne cherchera pas à calculer l'intégrale.
4) Application : on considère un potentiel quadratique $V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$. Retrouver la période des oscillations de l'oscillateur harmonique en utilisant la relation établie en 3).
On donne qu'une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin(x)$.