Corrigé Série 07 : Moment cinétique, gravitation

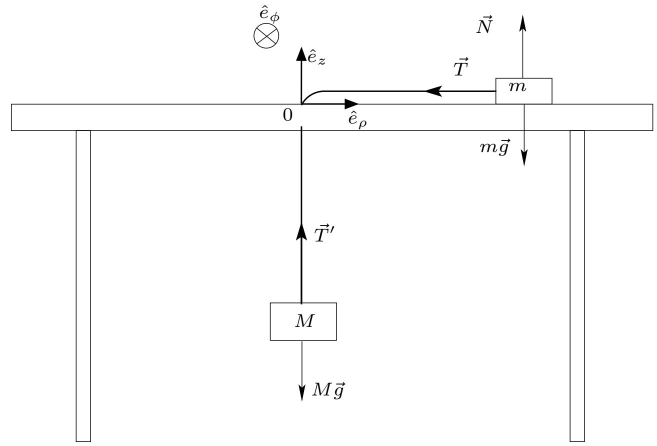
Question conceptuelle

a) Cette question a été importante dans la réflexion de Newton et la réponse qu'il a donnée a permis à la science de se distancer de la conception antique qui considérait que la physique des astres était différente de celle des objets communs. La Lune comme la pomme subit une force d'attraction de la part de la Terre. Si une pomme, ou la Lune, est lâchée sans vitesse initiale, elle s'écrasera sur la Terre. Mais que se passe-t-il si la vitesse initiale a une composante transverse (perpendiculaire au vecteur position par rapport au centre de la Terre) non nulle ? Dans le cas de la pomme «sur la Terre», pour des conditions usuelles, la force d'attraction est considérée comme constante (et la surface de la Terre comme plane). Donc la trajectoire résultante est une parabole coupant la surface de la Terre.

Imaginez maintenant que la pomme puisse être lancée à une très grande vitesse. Il n'est alors plus possible de considérer la force d'attraction comme constante (et la surface de la Terre comme plane). La trajectoire n'est plus une parabole. Il s'agit d'une ellipse qui ramènerait la pomme à sa position initiale si cette trajectoire ne coupait pas la surface de la Terre. C'est la situation de la Lune : la force d'attraction entre elle et la Terre résulte en une trajectoire elliptique qui, étant donné les conditions initiales, ne coupe pas la surface de la Terre. En conclusion, on peut dire en jouant sur les mots, que la Lune «tombe» sur la Terre, mais que, du fait de sa vitesse transverse, elle tombe en fait «à côté de la Terre», et donc elle continue à tomber à l'infini en orbitant autour de la Terre. Pour une explication plus détaillée et imagée, voir la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=XzYk-V8j_Nk`

Pour le physicien, la Lune ne tombe pas sur la Terre car son moment cinétique $\vec{L}$ par rapport à la Terre est conservé. Ceci vient du fait que la force gravitationnelle exercée par la Terre sur la Lune est une force centrale. Le moment cinétique de la Lune vaut $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, où $\vec{r}$ est le vecteur reliant la Terre à la Lune et $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement de la Lune. Pour que la Lune puisse tomber sur la Terre, c'est-à-dire atteindre la position $\vec{r} = 0$, il faudrait que son moment cinétique soit nul, et ceci déjà maintenant. Or ce moment cinétique ne peut être zéro maintenant que si $\vec{p}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si la vitesse de la lune est purement radiale (ou bien nulle). Ceci n'est manifestement pas le cas, la vitesse étant presque exclusivement transverse.

1 La table à trou



Les coordonnées les plus appropriées à la résolution de ce problème sont les coordonnées cylindriques. Soit $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ le repère associé à ces coordonnées. La vitesse et l'accélération s'écrivent

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z \, , \tag{1}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z \, . \tag{2}$$

a) L'énergie mécanique totale du système est la somme des énergies cinétiques et potentielles des deux blocs.

— Energie cinétique de m : $E_{cin,m} = \frac{1}{2}m\vec{v}_m^2$. Mais la masse m est contrainte à se déplacer sur la table définie par $z_m = 0$, on a donc $\dot{z}_m = 0$. Il reste

$$\vec{v}_m = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi \qquad \text{et} \qquad E_{cin,m} = \frac{1}{2}m(\rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2) \, . \tag{3}$$

— Energie cinétique de M : $E_{cin,M} = \frac{1}{2}M\vec{v}_M^2$. Mais la masse M n'a qu'un mouvement vertical, donc

$$\vec{v}_M = \dot{z}_M\hat{e}_z \qquad \text{et} \qquad E_{cin,M} = \frac{1}{2}M\dot{z}_M^2 \, . \tag{4}$$

— Energie potentielle de m : $E_{pot,m} = mgz_m$, mais la masse est posée sur la table, donc $z_m = 0$ et $E_{pot,m} = 0$.

— Energie potentielle de M : $E_{pot,M} = Mgz_M$.

— Les forces de tension $\vec{T} = -|T|\hat{e}_\rho$ et $\vec{T}' = |T'|\hat{e}_z$ travaillent, mais elles ne dérivent pas d'un potentiel. Par contre, on sait que les deux tensions ont la même norme ($|T| = |T'|$), et que, puisque la longueur du fil est constante, une variation $d\rho$ de la coordonnée ρ du bloc de masse m sera égale à une variation dz de la coordonée z du bloc de masse M. Les travaux de ces deux forces sont alors $\delta W = -|T|d\rho$ et $\delta W = |T'|dz = |T|d\rho$, c'est-à-dire de valeurs absolues égales mais de signes opposés. Leurs travaux s'annulent donc et ne contribuent pas à une variation de l'énergie mécanique du système.

On a donc l'énergie totale du système

$$E = \frac{1}{2}M\dot{z}_M^2 + \frac{1}{2}m(\rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2) + Mgz_M \, .$$

Le fil qui relie les deux masses a une longueur fixe $L = |\rho| + |z_M|$. Comme ρ est toujours positif et z_M négatif, on peut écrire $z_M = \rho - L$ et donc $\dot{\rho} = \dot{z}_M$. Cette contrainte nous permet d'exprimer l'énergie en fonction d'une seule des deux coordonnées z_M et ρ (par exemple ρ) :

$$E = \frac{1}{2}(m + M)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 + Mg(\rho - L) \, . \tag{5}$$

b) Les grandeurs conservées sont :

- L'énergie totale du système (5). Les forces qui s'appliquent sur la masse m sont le poids $m\vec{g}$, la force de soutien de la table $\vec{N} = -m\vec{g}$ et la tension exercée par le fil $\vec{T}$. Celles qui s'appliquent sur M sont le poids $M\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T}'$ de même norme que $\vec{T}$ (pour la direction de ces forces, voir le dessin). Les forces $m\vec{g}$ et $\vec{N}$ sont perpendiculaires au mouvement de m, elles ne travaillent donc pas. Les forces $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ travaillent, mais vu que $|\vec{T}| = |\vec{T}'|$ et $d\rho = dz_M$, on a $\delta W_T = \vec{T} \cdot \hat{e}_\rho d\rho = -|\vec{T}|d\rho = -|\vec{T}'|dz_M = -\vec{T}' \cdot \hat{e}_z dz = -\delta W_T'$.
  Le poids $M\vec{g}$ travaille et est conservatif ; l'énergie potentielle dont il dérive est incluse dans l'expression de l'énergie mécanique. Au final, l'énergie mécanique (5) est conservée, car toutes les forces sont conservatives, ne travaillent pas, ou leurs travaux s'anullent.
- Les résultantes des forces qui s'appliquent sur m ($\vec{N}+m\vec{g}+\vec{T}$) et sur M ($M\vec{g}+\vec{T}'$) sont des forces centrales (dirigées vers le trou de la table au point O) et donc le moment cinétique de chaque masse (par rapport au point O) est conservé. Calculons pour chaque bloc, le moment cinétique par rapport au point O :
  - Pour le bloc de masse m

    $$\vec{L}_{m,O} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \rho\hat{e}_\rho \wedge m(\rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{\rho}\hat{e}_\rho) = m\rho^2\dot{\phi}\hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\phi = m\rho^2\dot{\phi}\hat{e}_z \,,$$

    et donc

    $$\vec{L}_{m,O} \cdot \hat{e}_z = L_z = m\rho^2\dot{\phi} = cte\,. \tag{6}$$

  - Pour le bloc de masse M : un calcul similaire est trivial et donne un moment cinétique (constamment) nul :

    $$\vec{L}_{M,O} = z_M\hat{e}_z \wedge M\vec{v}_M = z_M\hat{e}_z \wedge M\dot{z}_M\hat{e}_z = \vec{0}\,. \tag{7}$$

c) Pour calculer les équations du mouvement, on peut soit utiliser la technique habituelle en partant de la deuxième loi de Newton, soit dériver les équations (5) et (6) qui sont les intégrales premières du mouvement. Comme il a été montré au cours, la conservation de l'énergie est une intégrale première de la deuxième équation de Newton. Ces deux méthodes sont donc équivalentes, seuls les calculs changent.

- Commençons par la deuxième méthode. La dérivée de (6) donne

  $$\frac{dL_z}{dt} = m(2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi}) = 0\,. \tag{8}$$

  Cette dérivée est nulle, car le moment cinétique est une constante.
  On dérive ensuite l'équation (5), on a

  $$0 = \frac{dE}{dt} = (M+m)\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 + m\rho^2\dot{\phi}\ddot{\phi} + Mg\dot{\rho}$$

  $$= (M+m)\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\phi}(\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) + Mg\dot{\rho}\,.$$

  Or on peut utiliser l'équation (8) et remplacer $\rho\ddot{\phi}$ par $-2\dot{\rho}\dot{\phi}$. On obtient

  $$0 = (M+m)\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 + Mg\,. \tag{9}$$

  Finalement, en introduisant (6), on obtient l'équation du mouvement pour la coordonnée ρ

  $$0 = (M+m)\ddot{\rho} - \frac{L_z^2}{m\rho^3} + Mg\,.$$

— On peut aussi utiliser la deuxième loi de Newton. Les forces qui s'appliquent sur m sont le poids $m\vec{g}$, la réaction de la table $\vec{N}$ ainsi que la tension du fil $\vec{T}$. Mais $m\vec{g}$ et $\vec{N}$ sont de même norme et de sens opposés, elles s'annulent car la masse m n'a pas d'accélération verticale. Il reste $\vec{T} = m\vec{a}_m$. Sur M, il y a le poids $M\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T}'$. On a donc $\vec{T}' + M\vec{g} = M\vec{a}_M$.

On projette la première équation sur les vecteurs $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\phi$:

$$\text{sur } \hat{e}_\rho : \qquad -T = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \tag{10}$$

$$\text{sur } \hat{e}_\phi : \qquad 0 = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \tag{11}$$

On a utilisé l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques. La deuxième équation projetée sur le vecteur $\hat{e}_z$ donne :

$$T' - Mg = M\ddot{z} = M\ddot{\rho}\,. \tag{12}$$

De (12), on tire $T' = M\ddot{\rho} + Mg$, que l'on introduit dans (10) en utilisant que les normes de $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ sont égales, pour obtenir

$$M\ddot{\rho} + Mg + m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = 0\,.$$

Cette équation est la même que (9). On peut aussi observer que les équations (11) et (8) sont identiques à un facteur ρ près.

2 Le pendule asymétrique

Les forces qui s'appliquent sur la bille sont le poids, qui est une force conservative, et la tension dans le fil, qui ne fournit aucun travail puisqu'elle est normale à la trajectoire. La conservation de l'énergie mécanique peut donc être utilisée pour répondre aux questions de ce problème.

a) Initialement, à la position 1, l'énergie E_1 de la bille est

$$E_1 = E_{cin,1} + E_{pot,1} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(d + L\cos\alpha)\,, \tag{13}$$

où l'on a exprimé l'énergie potentielle par rapport au point O.
Dans son extension maximale à l'opposé de la trajectoire (position 2), la bille est à l'arrêt ($E_{cin,2} = 0$) et le fil forme un angle β avec la verticale. On peut alors écrire l'énergie mécanique E_2

$$E_2 = \underbrace{E_{cin,2}}_{=0} + E_{pot,2} = -mg(d + L)\cos\beta\,. \tag{14}$$

La conservation de l'énergie mécanique $E_1 = E_2$ s'écrit

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mg(d + L\cos\alpha) = -mg(d + L)\cos\beta\,, \tag{15}$$

d'où l'on trouve une expression générale pour la vitesse initiale de la bille :

$$v_0 = \sqrt{2gd(1 - \cos\beta) + 2gL(\cos\alpha - \cos\beta)}\,. \tag{16}$$

Dans le cas particulier où $\beta = \alpha$, alors l'expression pour v_0 se simplifie comme suit :

$$v_0 = \sqrt{2gd(1 - \cos\alpha)}\,. \tag{17}$$

b) La vitesse maximale $v_{\rm max}$ est atteinte à la position où l'énergie cinétique est maximale et l'énergie potentielle est minimale. Cette position 3 est la plus basse de la trajectoire effectuée par la bille. L'énergie E_3 s'écrit

$$E_3 = E_{cin,3} + E_{pot,3} = \frac{1}{2} m v_{\rm max}^2 - mg(d+L)\,. \tag{18}$$

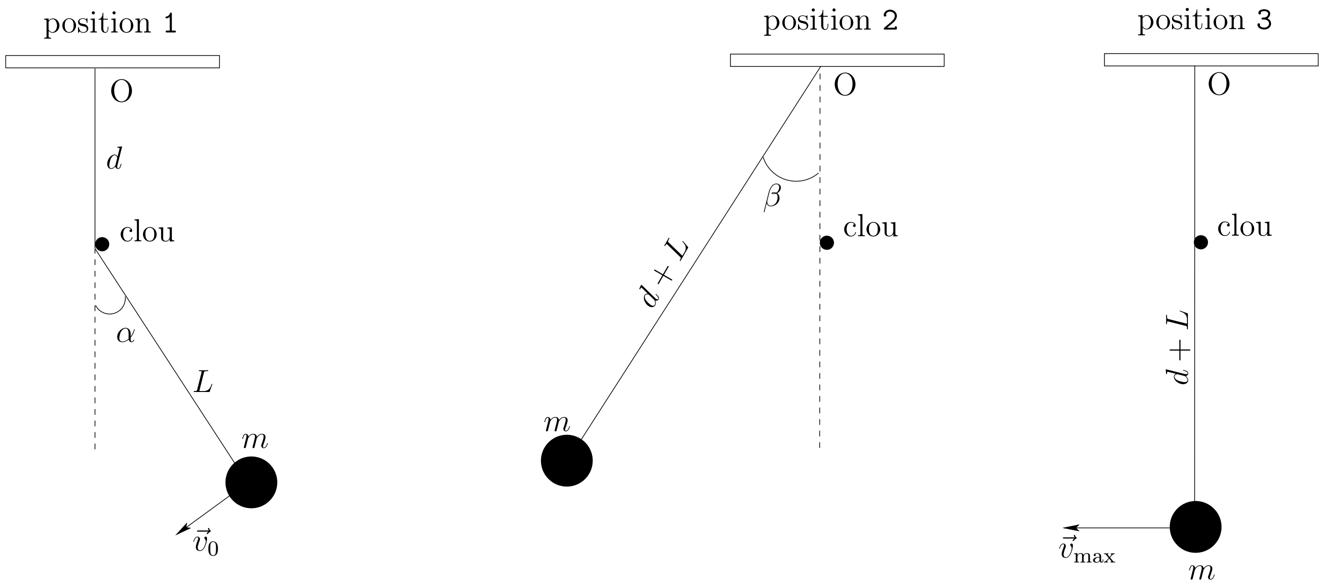
Par conservation de l'énergie, on a $E_3 = E_2$, et dans le cas particulier où $\beta = \alpha$, on a :

$$\frac{1}{2} m v_{\rm max}^2 - mg(d+L) = -mg(d+L)\cos\alpha\,, \tag{19}$$

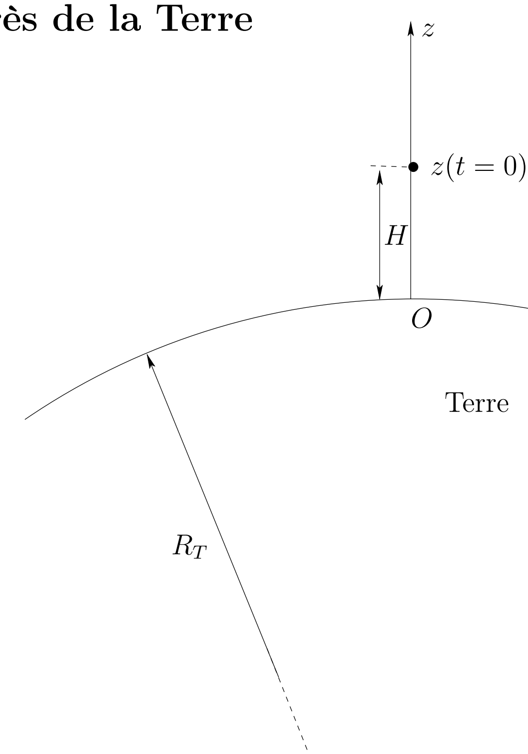
d'où l'on obtient

$$v_{\rm max} = \sqrt{2g(d+L)(1-\cos\alpha)}\,. \tag{20}$$

Remarque : le même résultat aurait été obtenu en posant $E_3 = E_1$.



3 Chute libre près de la Terre



a) La seule force qui s'exerce sur la bille en $z(t)$ est la gravitation, qui s'écrit

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{(R_\mathrm{T}+z)^2}\hat{e}_z\,.$$

La deuxième loi de Newton donne alors l'équation du mouvement selon $\hat{e}_z$:

$$m\ddot{z} = -\frac{GmM_T}{(R_\mathrm{T}+z)^2}\,. \tag{21}$$

b) La force de gravitation est la seule force exercée sur la bille. L'énergie mécanique du système est donc conservé. Le potentiel associé à la force de gravitation est donnée par :

$$V_G(z) = -\frac{GmM_T}{R_\mathrm{T}+z}.$$

On vérifie en effet que $\vec{F} = -\partial_z V_G(z)\vec{e}_z$. L'énergie mécanique de la particule est donc

$$E(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{GmM_T}{R_\mathrm{T}+z}.$$

c) Au point de départ, $\dot{z}=0$.

$$E(H,0) = -\frac{GmM_T}{R_\mathrm{T}+H}$$

Au niveau du sol, $z=0$, et l'énergie mécanique s'écrit

$$E(0,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{GmM_T}{R_\mathrm{T}}$$

On utilise la conservation de l'énergie pour trouver la vitesse v

$$v = \dot{z}|_{z=0} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{GmM_T}{R_\mathrm{T}} - \frac{GmM_T}{R_\mathrm{T}+H}\right)} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}\left(\frac{H}{R_T+H}\right)}\,. \tag{22}$$

d) Dans le cas où l'accélération gravifique est une constante égale à l'accélération au niveau du sol, $g = GM_T/R_T^2$, l'énergie mécanique E_g de la bille est

$$E_g(z_g, \dot{z}_g) = \frac{1}{2}m\dot{z}_g^2 + m\frac{GM_T}{R_T^2}z_g = m\frac{GM_T}{R_T^2}H\,.$$

Dans ce cas, la vitesse au sol devient

$$v_g = \dot{z}_g\big|_{z_g=0} = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T^2}H}\,. \tag{23}$$

Pour comparer les deux vitesses données par les équations (22) et (23), on peut calculer leur différence :

$$\Delta v = v - v_g = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}\left(\frac{H}{R_T+H}\right)} - \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T^2}H} = \sqrt{\frac{2GM_TH}{R_T^2}}\left(\sqrt{\frac{R_T}{R_T+H}} - 1\right)\,,$$

et la différence relative

$$\frac{\Delta v}{v_g} = \sqrt{\frac{R_T}{R_T+H}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{H}{R_T}}} - 1.$$

Puisque $\epsilon = \frac{H}{R_T} \ll 1$, on peut utiliser l'approximation $(1+\epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon$, et exprimer la différence relative comme

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{H}{R_T}}} - 1 \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{H}{R_T} - 1 = -\frac{H}{2R_T}.$$

L'application numérique nous donne que pour une chute de $H = 1000$ m, la vitesse au niveau du sol est

$$v = \sqrt{\frac{2\times 6.67\cdot 10^{-11}\times 5.9\cdot 10^{24}}{6371\cdot 10^3}\left(\frac{1000}{6371\cdot 10^3+1000}\right)} = 139.24\,\mathrm{m/s}$$

pour la force qui dépend de la hauteur, et

$$v_g = \sqrt{2\times\frac{6.67\cdot 10^{-11}\times 5.9\cdot 10^{24}}{(6371\cdot 10^3)^2}\times 1000} = 139.25\,\mathrm{m/s}$$

pour le cas où l'accélération est constante. La différence vaut donc $0.01\,\mathrm{m/s}$, et la différence relative est

$$\frac{\Delta v}{v_g} \approx -\frac{1000}{2\times 6371\cdot 10^3} = -8\cdot 10^{-5}\,,$$

ce qui montre que l'hypothèse de l'accélération constante proche de la surface de la Terre est une excellente approximation.

Exercices facultatifs : compléments de cours

a) Nous allons montrer que le potentiel associé à une force centrale conservative ne dépend que de r.

1) Voir cours. Une force centrale pointe toujours vers un même point O, soit $\vec{F}(M) = F(M)\frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||}$.

2) Choisissons les coordonnées cartésiennes pour dériver ce résultat (le produit scalaire ne dépend pas du choix de coordonnées).

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t)) = \frac{d}{dt}V(x,y,z) = \dot{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

On rappelle que le gradient de V est coordonnées cartésiennes est

$$\vec{\nabla}V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

On en déduit bien

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla}V.\vec{v}(t).$$

3) Voyons d'abord les coordonnées cylindriques. D'une part, nous avons

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t)) = \dot{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \dot{\phi}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \dot{z}\frac{\partial V}{\partial z}$$

et, d'autre part,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z.$$

On peut donc identifier chacun des termes du gradient à l'aide des dérivées, i.e.

$$\vec{\nabla}V = \frac{\dot{r}\frac{\partial V}{\partial r}}{\dot{r}}\vec{e}_r + \frac{\dot{\phi}\frac{\partial V}{\partial \phi}}{r\dot{\phi}}\vec{e}_\phi + \frac{\dot{z}\frac{\partial V}{\partial z}}{\dot{z}}\vec{e}_z,$$

$$\vec{\nabla}V = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \vec{e}_z\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Le gradient en coordonnées cylindriques est donc

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Pour les coordonnées sphériques, on écrit

$$\frac{d}{dt}V(\vec{r}(t)) = \dot{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \dot{\phi}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Les vitesses par contre sont données par

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi.$$

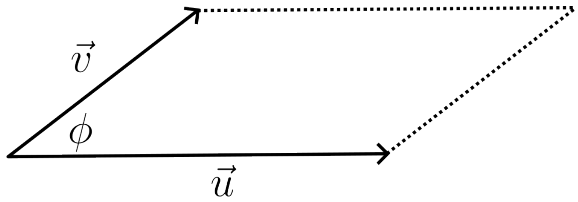
On obtient le gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}.$$

4) Une force centrale centrée en O pointe toujours selon $\vec{e}_r$. Si cette force est conservative, elle dérive d'un potentiel $V(r,\theta,\phi)$, i.e., $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$. On veut donc que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}V = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}V = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}V = \frac{\partial}{\partial \phi}V = 0. \tag{24}$$

V ne dépend donc ni de θ, ni de ϕ.



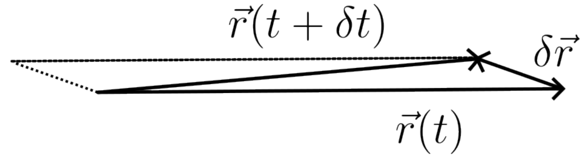


FIGURE 1 – Parallélogrammes pour les exercices supplémentaires. Gauche : question b) 1). Droite : question b) 2).

b) Nous allons ici montrer la loi des aires de Kepler dans le cas d'un mouvement général.

1) Rappel de mathématiques. On considère un parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (cf. Figure 1). L'aire du parallélograme dessiné est donné par $||\vec{u}||||\vec{v}||\sin\theta$. Dans le système de coordonnées cartésiennes, $\vec{u} = u\vec{e}_x$ et $\vec{v} = v\cos\phi\vec{e}_x + v\sin\phi\vec{e}_y$. Leur produit vectoriel est donc bien $\vec{u}\wedge\vec{v} = uv\sin\phi$.

2) Si l'on regarde le dessin Figure 1, l'aire balayée par $\vec{r}$ est la moitié du parallélogramme dessiné, et donc
$$A = \frac{1}{2}||\vec{r}(t)\wedge\delta\vec{r}||.$$

3) Considérons l'aire δA balayée durant le temps δt. On obtient
$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{1}{2\delta t}||\vec{r}(t)\wedge\delta\vec{r}|| = \frac{1}{2}||\vec{r}(t)\wedge\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}||.$$
Si on fait tendre δt vers 0, on obtient :
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}||\vec{r}(t)\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}|| = \frac{1}{2}||\vec{r}(t)\wedge\vec{v}||.$$
Or $\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p}$, d'où
$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}.$$

4) On rappelle que
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$
D'où
$$M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{a^3}{T^2}$$
On doit exprimer le rayon en m et la période en s par cohérence, soit
$$M = \frac{4\pi^2}{6.67\times10^{-11}}\frac{(150\times10^9)^3}{(365.25\times24\times3600)^2} \approx 2.01\times10^{30}\text{km}.$$
Cette valeur est à 1% de la masse du soleil sur wikipedia, malgré les approximations et arrondis que nous avons fait.

c) Dans cette question, nous allons utiliser la conservation de l'énergie mécanique pour dériver l'expression de la période des oscillations autour d'un minimum de l'énergie potentielle pour un potentiel arbitraire.

1) On considère une particule dans un potentiel unidimensionnel $V(x)$. Son énergie mécanique est donnée par

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \Leftrightarrow \frac{m\dot{x}^2}{2} = E - V(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{x}^2}{E - V(x)} = \frac{2}{m} \Leftrightarrow \frac{|\dot{x}|}{\sqrt{E - V(x)}} = \sqrt{\frac{2}{m}}.$$

Si on suppose que $\dot{x}$ a un signe constant, on obtient l'expression recherchée.

2) On considère une particule allant directement de x_1 au temps t_1 à x_2 au temps t_2. Pour simplifier, on considère $x_1 < x_2$. On peut intégrer les équations précédentes telles que :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\dot{x}}{\sqrt{E - V(x)}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}}$$

Soit, en remarquant que $\int_{t_1}^{t_2} dt\dot{x} = \int_{x_1}^{x_2} dx$,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(E - V(x))}} = t_2 - t_1.$$

3) Pour avoir des oscillations entre x_1 et x_2, il faut que l'énergie cinétique s'annule en ces points, et, du fait de la conservation de l'énergie, que leur énergie potentielle soit égale. On note aussi qu'il faut qu'il n'y ait pas de points avec une plus grande énergie potentielle entre eux. Soit $V(x_1) = V(x_2) = E$ et $V(x) < V(x_1)\ \forall x \in]x_1, x_2[$. Pour avoir une période du mouvement, il faut aller de x_1 à x_2 et revenir de x_2 à x_1. On obtient donc

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(E - V(x))}}$$

4) On considère des oscillations d'amplitude δx. Celles-ci sont nécessairement symmétriques car $V(x_0 + \delta x) = V(x_0 - \delta x)$. L'énergie mécanique E est donnée par $V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)\delta x^2$ car la vitesse s'annule aux extrema de l'oscillation. On obtient

$$T = 2\int_{x_0-\delta x}^{x_0+\delta x} dx \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{V''(x_0)(\delta x^2 - (x - x_0)^2)}}.$$

Un premier changement de variable $x \to x - x_0$ nous donne

$$T = 2\int_{-\delta x}^{\delta x} dx \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{V''(x_0)(\delta x^2 - x^2)}}.$$

Un second changement de variable $y = \frac{x}{\delta x}$ mène à

$$T = 2\int_{-1}^{1} dy \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{V''(x_0)(1 - y^2)}}.$$

On peut donc intégrer

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}\left[\arcsin(y)\right]_{-1}^{1},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

On retrouve bien le résultat attendu avec $k = V''(x_0)$.