EPFL — Lénaïc Chizat
Sections MX-EL-CGC — 30 octobre 2023

Analyse I – Série 6

Echauffement 1. (Série géométrique)

Discuter la convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ en utilisant

a) le critère de d'Alembert,
b) le critère de Cauchy.

Exercice 1.(*) (Règle de d'Alembert pour les suites)

Démontrer la règle de d'Alembert pour la convergence des suites (voir le chapitre 3 du cours). Indication : écrire la définition de $\lim_{n\to\infty} |u_{n+1}|/|u_n| = \rho$ en prenant $\varepsilon = |1-\rho|/2$).

Exercice 2. (Limites de suites définies par récurrence)

Soient $a_1 \in \mathbb{R}$ et la fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par $a_n = g(a_{n-1})$ pour $n = 2, 3, \ldots$. Montrer la convergence et calculer la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$ pour

a) $g(x) = \frac{1}{4}(3x+1)\ , \quad a_1 = 0$

b) $g(x) = \frac{1}{4}(x+4)\ , \quad a_1 = 3$

c) $g(x) = \frac{7}{3} - \frac{1}{1+x}\ , \quad a_1 = 1$

d) $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\,, \quad a_1 = \frac{3}{2}$

Exercice 3. (Exemples de suites) Donner un exemple dans chacune des situations suivantes :

1. une suite décroissante positive dont le terme général ne tend pas vers 0.
2. une suite bornée non convergente.
3. une suite positive non bornée ne tendant pas vers $+\infty$
4. une suite non monotone qui tend vers 0.
5. une suite positive qui tend vers 0 et qui n'est pas décroissante.

Exercice 4. (V/F : Limite inférieure et supérieure)

Soient (a_n) et (b_n) des suites numériques. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

	V	F
a) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = a$, alors $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n = -a$.	☐	☐
b) Si $\limsup_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors (a_n) converge vers zéro.	☐	☐
c) Si $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $a_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	☐	☐
d) Si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = 0$, alors $\limsup_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.	☐	☐

Exercice 5. (V/F : Suite à valeurs absolues décroissantes)

Soit (a_n) une suite numérique telle que $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

	V	F
a) Alors $(|a_n|)$ converge.	☐	☐

b) Alors (a_n) converge. ☐ ☐

c) Alors (a_n) a une sous-suite convergente. ☐ ☐

d) Alors $\liminf_{n\to\infty} a_n^2 = \limsup_{n\to\infty} a_n^2$. ☐ ☐

e) Alors (a_n) a au plus deux points d'accumulation. ☐ ☐

Exercice 6. (Calcul de lim Inf/lim Sup)

Soient $u_n = \frac{n+1}{n}\cos(\frac{n\pi}{2})$ et $v_n = \frac{n-1}{n}\sin(\frac{n\pi}{2})$. Calculer $\lim \mathrm{Sup}_{n\to\infty} u_n$, $\lim \mathrm{Inf}_{n\to\infty} u_n$, $\lim \mathrm{Sup}_{n\to\infty} v_n$, $\lim \mathrm{Inf}_{n\to\infty} v_n$, $\lim \mathrm{Sup}_{n\to\infty}(u_n + v_n)$, $\lim \mathrm{Inf}_{n\to\infty}(u_n + v_n)$.

Exercice 6. (Convergence de séries)

Déterminer si la série donnée converge ou diverge (pour les expressions faisant intervenir des racines $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, tenter de multiplier par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ au numérateur et dénominateur) :

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+5}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+7} - n\right)$ e) (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2}$

g) (*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n}$

Exercice 7. (Sommes de séries) Calculer les sommes des séries suivantes :

i) $-\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$

Exercice 8.(**) (Critères de convergence)

Soit la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Montrer que l'application des critères de Cauchy et de d'Alembert à cette série correspond à utiliser le critère de comparaison avec des séries géométriques adéquates.

Exercice 9. (V/F : Séries)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique. V F

a) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ☐ ☐

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ☐ ☐

c) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. ☐ ☐

d) Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge. ☐ ☐

e) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. ☐ ☐

f) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge. ☐ ☐

g) La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge. ☐ ☐