Lénaïc Chizat
6 novembre 2023

# Analyse I – Série 7

**Echauffement.** (Périodicité)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

a) La période de $f$ est-elle toujours définie ?
b) Montrer que la fonction $|f|$ est aussi périodique.
c) La réciproque de *b*) est-elle vraie ?
d) La période de $|f|$ est-elle égale à celle de $f$ (si elle est définie) ?

**Exercice 1.** (Convergence de séries avec un paramètre)

Etudier la convergence de la série en fonction de la valeur de $c \in \mathbb{R}$.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{1-c}\right)^n$, $c \neq 1$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (c-a)^n$, $a \in \mathbb{R}$ fixé

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1+c^2)^n$

Quelle est la somme de la série c) lorsqu'elle converge ?

**Exercice 2.** (Suite de sommes partielles)

Soit $0 < c < 1$, et posons pour tout entier $n \geq 1$ :

$$S_n = 1 + 2c + 3c^2 + \cdots + nc^{n-1}.$$

a) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $cS_n - S_n$.
b) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kc^{k-1}$.

**Exercice 3.** (Fonctions périodiques)

Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions $f$ suivantes en donnant la période le cas échéant :

a) $f(x) = \dfrac{x^4 \cos(3x)}{1+\sin(x)^2}$

b) $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

c) $f(x) = \operatorname{tg}(3x) + \cos(\pi x)$

d) $f(x) = (x - [x])^2$

<u>*Notation*</u> : $[x]$ est la partie entière du nombre réel $x$ (c.-à-d. $[x] \in \mathbb{Z}$ tel que $[x] \leq x < [x]+1$.

**Exercice 4.** (Fonctions monotones)

Soient les fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Déterminer la monotonie de leur composée $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si

a) $f$ et $g$ sont croissantes,

b) $f$ et $g$ sont décroissantes,

c) $f$ est croissante et $g$ est décroissante.

Qu'en est-il de la monotonie de $f \circ g$ dans le cas $c$) ?

**Exercice 5.** (Fonctions hyperboliques)

Vérifier les égalités suivantes :

a) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$

b) $\big(\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)\big)^k = \operatorname{ch}(kx) + \operatorname{sh}(kx)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

**Exercice 6.** (Fonctions hyperboliques réciproques)

Trouver les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques en suivant les étapes ci-dessous.

a) $f(x) = \operatorname{sh}(x)$

b) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$

c) $f(x) = \operatorname{th}(x)$

d) $f(x) = \operatorname{coth}(x)$

- Donner le domaine de définition et l'image de $f$.
- Exprimer la fonction réciproque $f^{-1}$ en termes des fonctions Log, $\sqrt{\ }$ et polynômes.
- Préciser le domaine de définition de $f^{-1}$.
- Esquisser les graphes de $f$ et $f^{-1}$.

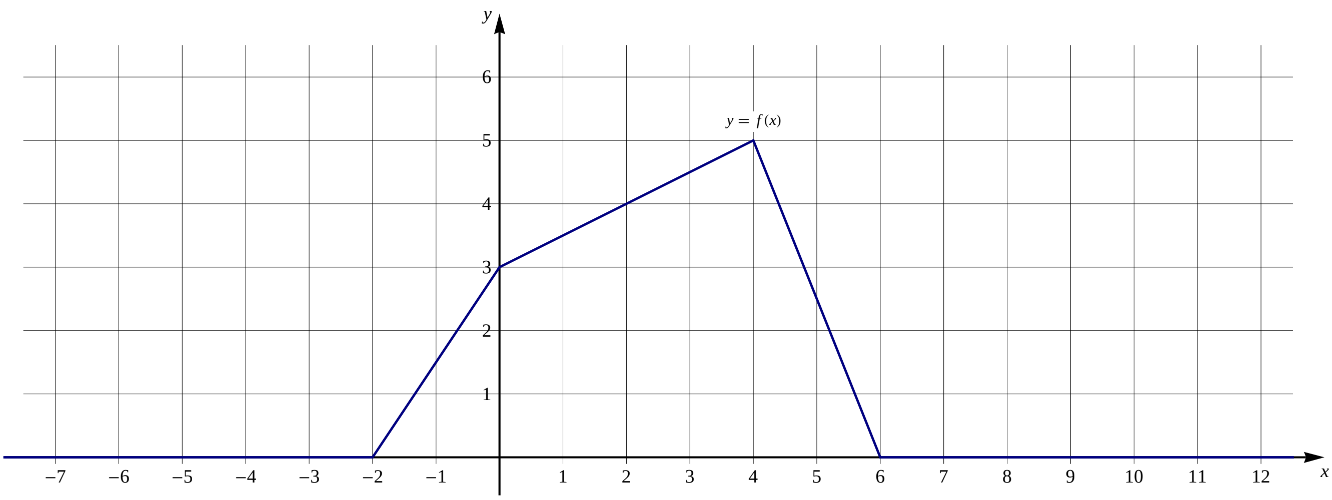
**Exercice 7.** (Fonctions bijectives)

a) Soient les fonctions $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to A$ telles qu'on ait pour tout $x \in A$ que $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $y \in B$ que $(f \circ g)(y) = y$. Montrer que $f$ est bijective et que $g = f^{-1}$.

b) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que si $f$ est bijective, alors sa fonction réciproque est aussi impaire.

**Exercice 8.** (Transformations affines)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction représentée ci-dessous.



Tracer sur la même figure les graphes des fonctions $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

a) $g(x) = f(-x)$ b) $g(x) = f(x-5)$ c) $g(x) = f(2x)$ d) $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

**Exercice 9.** (Composition de fonctions)

Pour les deux fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ :

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x+2, & x < 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |2x-1|, & x \geq -1 \\ -x(x+2), & x < -1 \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x-4}, & x \geq 4 \\ 1-\frac{1}{2}x, & x < 4 \end{cases}$

**Exercice 10.** (V/F : Propriétés de fonctions)

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

| | V | F |
|---|---|---|
| a) Si $f$ est strictement monotone , alors $f$ est injective. | ☐ | ☐ |
| b) Si $f$ est injective, alors $f$ est monotone. | ☐ | ☐ |
| c) Si $f$ est bijective et croissante, alors son inverse $f^{-1}$ est décroissante. | ☐ | ☐ |
| d) Si $f \circ g$ est décroissante, alors $f$ et $g$ sont décroissantes. | ☐ | ☐ |