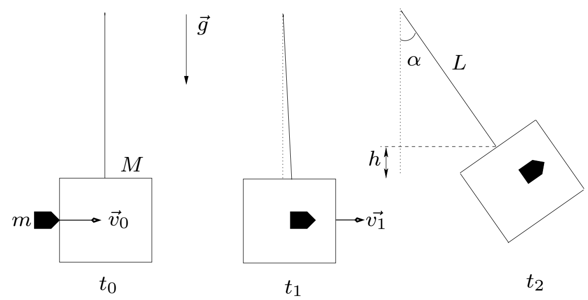
Corrigé du Minitest 3

Pendule balistique – (19 points)



a) (4 points au total)

Parmi toutes les forces qui s'appliquent sur le système formé de la balle et du bloc, seuls les poids de la balle et du bloc, ainsi que la tension T du fil sont des forces extérieures. En appliquant la deuxième loi de Newton (théorème du centre de masse) à ce système, on obtient

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T} \tag{1}$$

où $\vec{p}_{\text{tot}}$ est la quantité de mouvement totale du système. Comme toutes les forces extérieures sont verticales, la somme de ces forces ne peut avoir une composante non nulle que dans la direction verticale. Comme le mouvement de la balle et du bloc sont supposés être tous deux horizontaux, le centre de masse du système n'a pas de mouvement vertical, et donc la somme des forces extérieures n'a pas de composante verticale. En fin de compte la somme des forces extérieures est nulle, ce qui implique que la quantité de mouvement totale du système est conservée (constante entre les instants t_0 et t_1) : $\boxed{\text{2 points, dont un pour la justification}}_{\text{A,B}}$

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{tot}}(t) = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{tot}}(t_1) = \vec{p}_{\text{tot}}(t_0)\,. \tag{2}$$

Les seules forces qui travaillent entre t_0 et t_1 sont la force de frottement du bloc sur la balle, $\vec{F}$, et de la balle sur le bloc $\vec{F}' = -\vec{F}$. En effet toutes les autres forces sont verticales, c'est-à-dire perpendiculaires au mouvement de la balle et du bloc. La force $\vec{F}$ est une force de frottement cinétique, qui n'est pas conservative. L'énergie mécanique du système n'est donc pas conservée. $\boxed{\text{2 points, dont un pour la justification}}_{\text{C,D}}$

<u>Note</u> : Puisque les forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ sont opposées, on pourrait penser que leurs travaux devraient être opposés, donc que leur travail total devrait être nul et ainsi que le système soit conservatif. Ce raisonnement est incorrect. En effet, entre les temps t_0 et t_1, la balle fait un plus grand déplacement que le bloc, la différence entre ces deux déplacements étant égale à la profondeur de pénétration de la balle dans le bloc. Par conséquent, la valeur absolue du travail de $\vec{F}$ est supérieure à la valeur absolue du travail de $\vec{F}'$.

b) (4 points au total)

La balle subit les forces suivantes entre les instants t_1 et t_2 :

— son poids $m\vec{g}$ vertical vers le bas ;
— une force $\vec{R}$ exercée par le bloc sur la balle ;
Le bloc subit les forces suivantes entre les instants t_1 et t_2 :
— son poids $M\vec{g}$ vertical vers le bas ;
— une force $\vec{T}$ exercée par le fil sur le bloc, dans la direction du point d'attache du fil ;
— une force $\vec{R}' = -\vec{R}$ (en vertu de la 3ème loi de Newton).
La résultante des forces extérieures $m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T}$ est non nulle (puisque les poids sont verticaux mais que la tension du fil ne l'est pas), et donc la quantité de mouvement totale du système n'est pas conservée. $\boxed{\text{2 points, dont un pour la justification}}_{\text{E,F}}$
Par contre, il n'y a plus de force de frottement et le système est devenu conservatif. Les seules forces qui travaillent sont les poids, et donc l'énergie mécanique totale du système est une constante du mouvement :

$$E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{tot}}(t_2) = E_{\text{tot}}(t_1)\,. \tag{3}$$

$\boxed{\text{2 points, dont un pour la justification}}_{\text{G,H}}$

Note : Cette fois la balle et le bloc ont le même déplacement (puisque la balle ne bouge plus par rapport au bloc), et donc les forces opposées $\vec{R}$ et $\vec{R}'$ ont des travaux opposés, c'est-à-dire un travail total nul.

c) (5 points au total)
Au temps t_0 la balle a une vitesse $\vec{v}_0$ et le bloc a une vitesse nulle. Au temps t_1, le bloc et la balle ont la même vitesse horizontale notée $\vec{v}_1$. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement totale entre t_0 et t_1 (équation (2)), on obtient :

$$m\vec{v}_1 + M\vec{v}_1 = m\vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \frac{m}{m+M}\vec{v}_0\,. \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{I}} \tag{4}$$

En utilisant la conservation de l'énergie entre t_1 et t_2 (équation (3)), on obtient :

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 - (m+M)gL = \underbrace{\frac{1}{2}(m+M)v_2^2}_{=0} - (m+M)gL\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}v_1^2 = \cancel{(m+M)}gh\,, \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{J}} \tag{5}$$

où

$$h = L - L\cos\alpha = L(1-\cos\alpha) \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{K}} \tag{6}$$

est la hauteur de montée du système. En remplaçant $\vec{v}_1$ et h par leurs expressions (4) et (6) dans l'équation (5), $\boxed{\text{1 point pour combiner les trois équations}}_{\text{L}}$ il vient

$$gL(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}\,. \tag{7}$$

$\boxed{\text{1 point pour la solution}}_{\text{M}}$

d) (6 points au total)
On utilise le théorème de l'énergie cinétique qui dit que le travail des forces est égal à la variation d'énergie cinétique.

En appliquant ceci à la balle, entre les temps t_0 et t_1, on obtient :

$$\begin{aligned} W^{\text{balle}} &= \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 && (8)\\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{m^2}{(m+M)^2} - 1\right) = -\frac{1}{2}\frac{mM(2m+M)}{(m+M)^2}v_0^2 \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{N}} && (9)\\ &= -\frac{M(2m+M)}{m}gL(1-\cos\alpha). && (10) \end{aligned}$$

Ce travail est négatif, $\boxed{\text{1 point}}_{\text{O}}$ car il est dû uniquement à la force de frottement du bloc sur la balle.

Pour le bloc, le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre t_0 et t_1 donne

$$\begin{aligned} W^{\text{bloc}} &= \frac{1}{2}Mv_1^2 - 0 = \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2M}{(m+M)^2}v_0^2 \,. \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{P}} && (11)\\ &= MgL(1-\cos\alpha). && (12) \end{aligned}$$

Ce travail est celui de la force $\vec{F}'$. Il est positif. $\boxed{\text{1 point}}_{\text{Q}}$

Le travail total $W = W^{\text{balle}} + W^{\text{bloc}}$ est égal à

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}(m+M)v_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\frac{m^2}{(m+M)^{\cancel{2}}}v_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 && (13)\\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{m}{m+M} - 1\right) = -\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_0^2 \,. \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{R}} && (14)\\ &= -\frac{M}{m}(m+M)gL(1-\cos\alpha). && (15) \end{aligned}$$

Ce travail total est négatif. $\boxed{\text{1 point}}_{\text{S}}$