

Corrigé du Minitest 4

Bobine et fil – (10 points)

On choisit un repère $Oxyz$ droit, d'origine O au point de contact A de la bobine avec le sol, d'axe \hat{z} vertical dirigé vers le haut, et d'axe \hat{x} horizontal et dirigé dans le sens de la projection horizontale de la force \vec{F} .

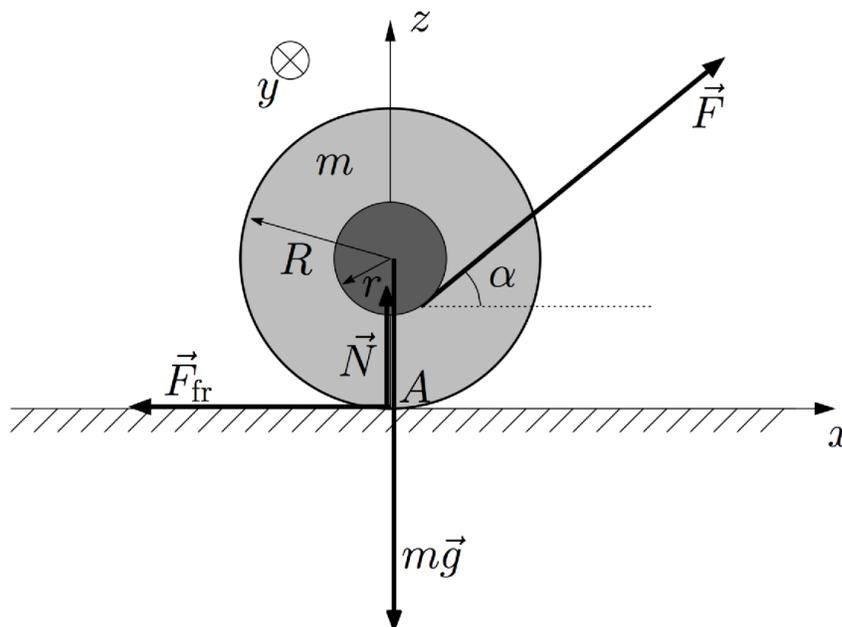
a) (2 points au total)

Les forces qui s'appliquent sur la bobine sont :

- le poids $m\vec{g}$ de la bobine, appliquée en son centre de masse.
- la force de soutien \vec{N} de la bobine, dirigée vers le haut, et appliquée au point de contact de la bobine avec le sol.
- la force de frottement statique \vec{F}_{fr} de la bobine avec le sol, parallèle à \hat{x} , et appliquée au point de contact de la bobine avec le sol.
- La force \vec{F} du fil sur la bobine, formant un angle α avec l'axe Ox , et appliquée tangentiellement au cylindre de rayon r en un point de coordonnées $r \sin \alpha$ (horizontale) et $-r \cos \alpha$ (verticale) relativement au centre de la bobine.

1 point pour les 4 forces (enlever 1/2 point pour chaque force manquante) A

1 point pour les 4 points d'application (−1/2 point par erreur) B



b) (7 points au total)

Les équations du mouvement sont données par les théorèmes du centre de masse et du moment cinétique.

En projection sur les axes Ox et Oz , le théorème du centre de masse donne :

$$F \cos \alpha + F_{\text{fr},x} = m\ddot{x}, \quad \boxed{1 \text{ point}} \quad \text{C} \quad (1)$$

$$N - mg + F \sin \alpha = 0 \quad \boxed{1 \text{ point}} \quad \text{D} \Rightarrow N = mg - F \sin \alpha > 0. \quad (2)$$

On applique le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse de la bobine. Les moments sont tous parallèles à \hat{y} , et on écrit la projection selon cet axe :

$$-Fr - F_{\text{fr},x}R = I\dot{\omega}. \quad (3)$$

$\boxed{1 \text{ point pour l'application du théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse}} \quad \text{E}$

$\boxed{1 \text{ point pour le calcul des moments}} \quad \text{F}$

$\boxed{1 \text{ point pour } L = I\omega} \quad \text{G}$

Puisque le roulement est sans glissement, on a la relation $\ddot{x} = R\dot{\omega}$. $\boxed{1 \text{ point}} \quad \text{H}$

On peut alors réécrire l'équation (1) comme

$$F \cos \alpha + F_{\text{fr},x} = mR\dot{\omega}, \quad (4)$$

que l'on combine avec l'équation (3) pour éliminer $F_{\text{fr},x}$ et trouver l'accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{F(R \cos \alpha - r)}{I + mR^2}. \quad \boxed{1 \text{ point}} \quad \text{I} \quad (5)$$

Solution alternative :

On peut écrire les moments par rapport au point de contact A de la bobine avec le sol. Dans ce cas, le seul moment non nul est celui appliqué par la force \vec{F} :

$$\begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ 0 \\ R - r \cos \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \cos \alpha \\ 0 \\ F \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ RF \cos \alpha - rF \\ 0 \end{pmatrix} = I_A \dot{\omega}. \quad (6)$$

$\boxed{1 \text{ point pour l'application du théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe (A)}} \quad \text{E}$

$\boxed{1 \text{ point pour le calcul des moments}} \quad \text{F}$

$\boxed{1 \text{ point pour } L = I\omega} \quad \text{G}$

En utilisant le théorème de Steiner, on trouve

$$I_A = I + mR^2. \quad \boxed{1 \text{ point}} \quad \text{H} \quad (7)$$

La composante selon \hat{y} de l'équation (6) devient

$$RF \cos \alpha - rF = (I + mR^2)\dot{\omega}, \quad (8)$$

d'où l'on trouve l'accélération angulaire

$$\dot{\omega} = \frac{F(R \cos \alpha - r)}{I + mR^2}. \quad \boxed{1 \text{ point}} \quad \text{I} \quad (9)$$

c) (1 points au total)

Le système est à l'équilibre statique si $\dot{\omega} = 0$. Ceci est réalisé si

$$\cos \alpha = \frac{r}{R}, \quad \boxed{1 \text{ point}} \quad \text{J} \quad (10)$$

ce qui correspond à la situation dans laquelle la force \vec{F} n'applique aucun moment par rapport au point de contact de la bobine avec le sol.