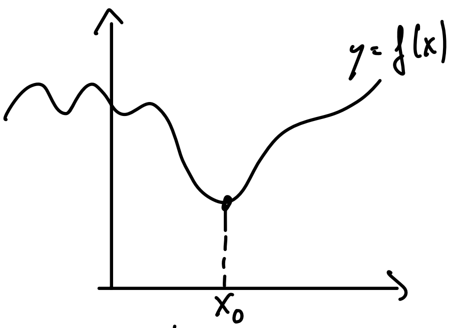
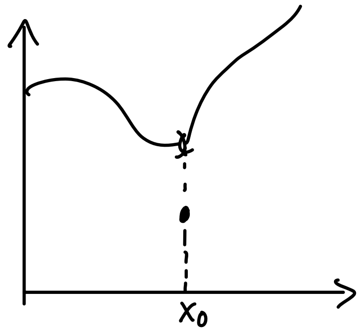
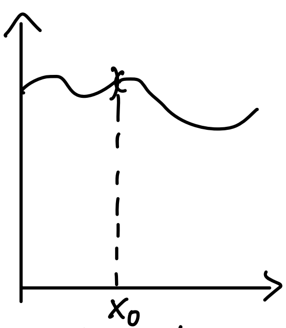


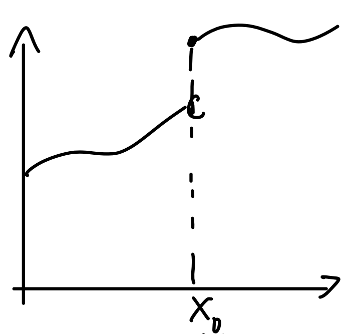
continue en x_0



non continue en x_0



$x_0 \notin D$ donc la question de la continuité ne se pose pas



non continue en x_0

Fin cours 06/11

Def: une fonction élémentaire est une fonction $f : D(f) \to \mathbb{R}$ qui est construite à partir des fonctions polynômes, racines n-ièmes, exponentielle, logarithme sinus et cosinus et de leurs fonctions réciproques et d'un nombre fini d'opérations $+, -, \cdot, /, \circ$

produit division composition

Thm: les fonctions élémentaires sont toutes continues sur leur domaine de définition.

Exemple:

- $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \exp\left(\cos\left(\log\left(\sqrt{ch(x)}\right)\right)\right) = \exp\left(\cos\left(\log\left(\sqrt{ch(0)}\right)\right)\right) = e$
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

  f est continue en x_0 , $\forall x_0 \in D(f)$.

  $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ (vu cours précédent)

Donc la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

est continue en tout $x \in \mathbb{R}$.

Def (Prolongement par continuité). Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $D =]a,b[\setminus \{x_0\}$ ($x_0 \in]a,b[$)

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$

est le prolongement par continuité de f, et g est continue en x_0.

Définition équivalente de la continuité "avec ε et δ"

Thm : Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in D(f)$ tel que $\exists r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset D(f)$. On a que f est continue en x_0 ssi :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que
$\forall x \in D(f)$, $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Rmq : il s'agit simplement de la définition de la limite "avec ε et δ" où la limite ℓ est remplacée par $f(x_0)$.

Thm (composition de fonctions). Soient $f : D(f) \to \mathbb{R}$ et $g : D(g) \to \mathbb{R}$ telles que $\mathrm{Im}(g) \subset D(f)$. On a $f \circ g : D(g) \to \mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in D(g)$. Si
- g est continue en x_0, et
- f est continue en $g(x_0)$

Alors $f \circ g$ est continue en x_0.

Contre-exemple :

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

↖ prolongement par continuité

Comportement de $f \circ g$ en $x_0 = 0$?

- On a $-x \leq g(x) \leq x$, $\forall x \neq 0$ donc par le Thm. des gendarmes on a $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$ donc g est continue en 0.
- On a $\lim_{y \to g(0) = 0} f(y) = 1 \neq f(g(0)) = f(0) = 0$

Donc f n'est pas continue en $0 = g(0)$.

Donc le Thm. ne s'applique pas.

Par ailleurs on a :

- $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(x_n)) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(0) = 0$.
- $\tilde{x}_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{x}_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(g(\tilde{x}_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\underline{\dfrac{1}{2\pi n + \pi/2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Donc $f \circ g$ n'est pas continue en 0.

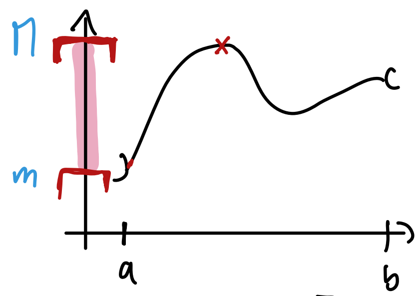
5.7 Propriétés globales des fonctions continues

5.7.1 1er cas : fonctions continues sur $]a,b[$ (intervalle ouvert)

Def: Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \text{ ou } -\infty \\ b \in \mathbb{R} \text{ ou } +\infty \end{cases}$. On dit que f est continue sur $]a,b[$ si f est continue en tout point $x_0 \in]a,b[$.

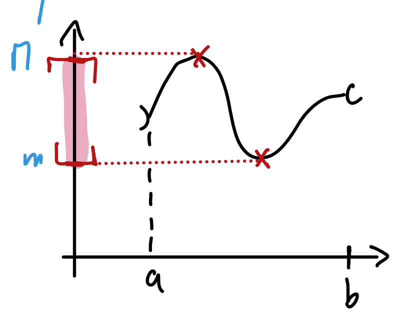
Prop: Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue sur $]a,b[$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est un intervalle (peut-être ouvert, fermé ou aucun des deux).

(se déduit des résultats qui suivront dans la section 5.7.2).



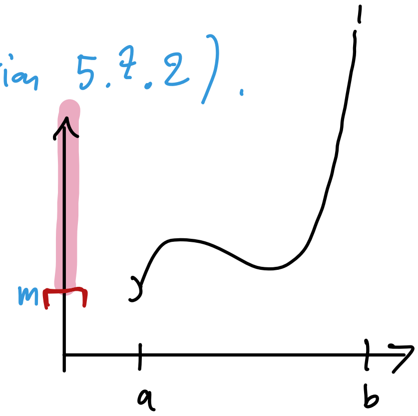
$\mathrm{Im}(f) =]m, M]$

f est continue



$\mathrm{Im}(f) = [m, M]$

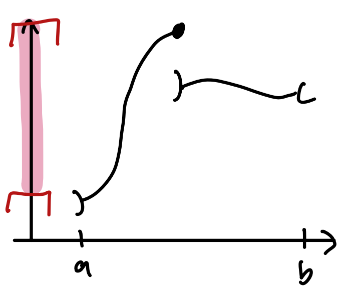
f continue

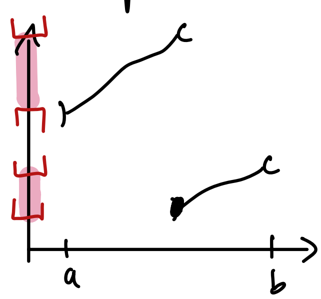


$\mathrm{Im}(f) =]m, +\infty[$

f continue

Quand f n'est pas continue tous les comportements sont possibles :





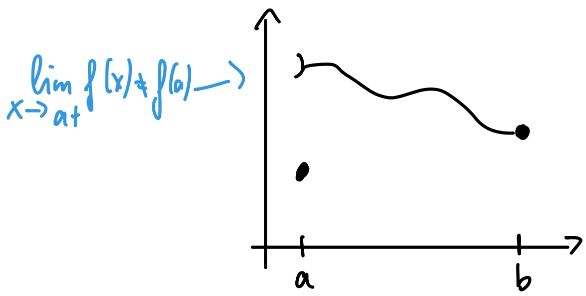
5.7.2. 2ème cas : fonctions continues sur $[a,b]$, intervalle fermé et borné

Def : On dit que f est ($f : [a,b] \to \mathbb{R}$) :

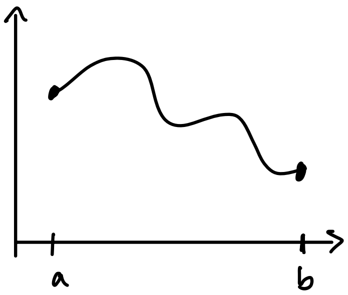
- continue à droite en $x_0 \in [a,b[$ si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- continue à gauche en $x_0 \in]a,b]$ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Def : On dit que f est continue sur $[a,b] \subset D(f)$ ssi :

- f est continue sur $]a,b[$
- f est continue à droite en a
- f est continue à gauche en b.



continue sur $]a,b[$, aussi continue sur $]a,b]$
mais pas continue sur $[a,b]$.



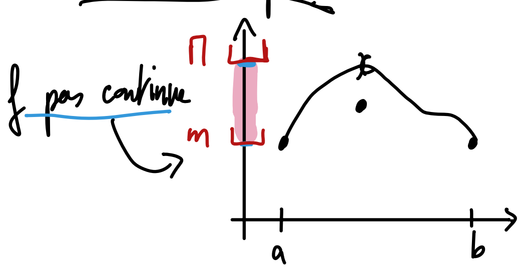
continue sur $[a,b]$

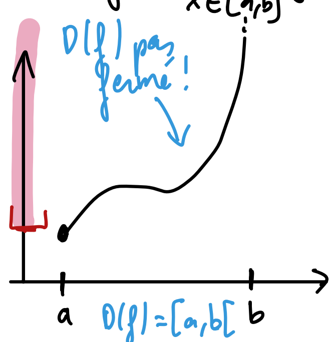
Thm 1 | Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$.
Alors f admet un minimum et un maximum.
c'est-à-dire que $\exists c, C \in [a,b]$ tels que $f(c) \leq f(x) \leq f(C)$ $\forall x \in [a,b]$.

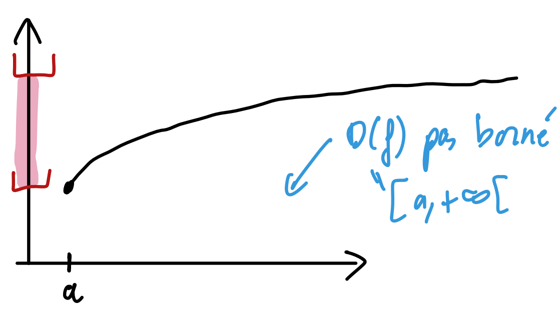
Notation : on note

$$\begin{cases} \min f \equiv \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \equiv \min \operatorname{Im}(f) & (\text{minimum}) \\ \max f \equiv \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \equiv \max \operatorname{Im}(f) & (\text{maximum}) \end{cases}$$

Contre-exemple :







Preuve : • Soit $M = \sup \{ f(x) \; ; \; x \in [a,b] \} = \sup \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

On veut trouver $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = M$:

- Il existe une suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a,b]$ et $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M$ (propriétés du supremum, détails après). (*)

① intervalle borné

- Par Bolzano-Weierstrass (x_n) admet une sous-suite $(\tilde{x}_n)$ qui converge, donc $\exists c \in [a,b]$ tel que $\lim_{n \to +\infty} \tilde{x}_n = c$.

② intervalle fermé

- On a $\lim_{n \to +\infty} f(\tilde{x}_n) = \begin{cases} M & \text{car } (f(\tilde{x}_n)) \text{ est une sous-suite de } (f(x_n)) \\ f(c) & \text{par continuité de } f. \end{cases}$

- Donc $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M < +\infty$ ③ continuité

Donc M est un maximum. (la démonstration est analogue pour le minimum) ■

Détail (*) : $M = \sup A$ avec $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ t.q. $M - \varepsilon \leq a \leq M \Rightarrow |a - M| \leq \varepsilon$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $\varepsilon = \frac{1}{n}$ il s'ensuit $\exists a_n \in A$ tel que $|a_n - M| \leq \frac{1}{n}$

Dans le cadre de (*) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$ t.q. $|f(x_n) - M| \leq \frac{1}{n}$.

Ceci est un exemple de suite $(x_n)_{n \geq 1}$ satisfait (*). ■

fin cours 9/11