EPFL — Lénaïc Chizat

Sections MX-EL-CGC — 20 novembre 2023

Analyse I – Série 9

Echauffement. (V/F : Continuité sur un intervalle)

Soient I un intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f.

	V	F
a) $f(I)$ est un intervalle.	☐	☐
b) Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.	☐	☐
c) Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.	☐	☐
d) Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.	☐	☐
e) (*) Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint soit son min soit son max sur I.	☐	☐
f) (*) Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.	☐	☐
g) Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.	☐	☐

Exercice 1. (Continuité à gauche et à droite)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}\,, & x > 3 \\ \alpha\,, & x = 3 \\ \beta x - 4\,, & x < 3 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

a) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ b) $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ c) $\left(2, \frac{5}{3}\right)$ d) $(1, 2)$ e) $(2, 2)$

Exercice 2. (Théorème des valeurs intermédaires)

Montrer que les équations suivantes admettent des solutions dans leurs domaines de définition :

a) $e^{x-1} = x + 1$ b) $x^2 - \dfrac{1}{x} = 1$

Exercice 3. (Algorithme de bissection)

En appliquant l'algorithme de bissection, localiser une solution de l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0$$

dans un intervalle de longueur $L \leq \frac{1}{8}$.

Exercice 4. (Dérivabilité)

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta\,, & x > 1 \end{cases}$$

Exercice 5. (Dérivabilité)

Déterminer toutes les valeurs de l'entier $m \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une dérivée au point $x = 0$. Pour lesquelles de ces valeurs m la dérivée f' est-elle continue au point $x = 0$?

a) $f(x) = \begin{cases} \sin(x^m)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^m \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

Exercice 6. (Propriétés de la dérivée)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

a) f paire $\Rightarrow$ f' impaire,
b) f impaire $\Rightarrow$ f' paire,
c) f périodique $\Rightarrow$ f' périodique.

Exercice 7. (Dérivées d'ordre supérieur)

Dans les trois cas suivants, calculer $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f, pour $n \in \mathbb{N}$:
a) $f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z})$ b) $f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$ c) $f(x) = \mathrm{Log}(x)$

Exercice 8. (Dérivée d'une composée de fonctions)

Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

a) $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\sin(x)^7\cos(x)^4$ et $g(x) = \mathrm{Log}(x)^3$.
b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = (x-1)^4$.

Exercice 9. (Calcul de dérivées)

Calculer la dérivée f' de la fonction f et donner les domaines de f et f'.

a) $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
c) $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x^2)$ d) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (sans formulaire !)
e) $f(x) = \sqrt{\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}$ f) $f(x) = \sqrt[5]{\left(2x^4 + e^{-(4x+3)}\right)^3}$
g) $f(x) = \mathrm{Log}_3\left(\mathrm{ch}(x)\right)$ h) $f(x) = \mathrm{Log}\left(4^{\sin(x)}\right)e^{\cos(4x)}$

Exercice 10. (V/F : Dérivation)

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions.

	V	F
a) (*) Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\delta > 0$ tel que f est continue sur $]a-\delta, a+\delta[$.	☐	☐
b) Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a.	☐	☐
c) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) = \sqrt{f^2(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.	☐	☐
d) Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$.	☐	☐