Analyse I – Série 9

Echauffement. (V/F : Continuité sur un intervalle)

Soient I un intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f(I)$ l'image de I par f.

	V	F
a) $f(I)$ est un intervalle.	☐	☐
b) Si I est borné et fermé, alors $f(I)$ est borné et fermé.	☐	☐
c) Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.	☐	☐
d) Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.	☐	☐
e) (*) Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, alors f atteint soit son min soit son max sur I.	☐	☐
f) (*) Si $I = [a, \infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors f atteint soit son minimum soit son maximum sur I.	☐	☐
g) Si f est strictement croissante et I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.	☐	☐

Sol.:

a) *VRAI.*
Soient $y_1, y_2 \in f(I)$ tels que $y_1 < y_2$ et soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Par le théorème de la valeur intermédiaire appliqué à l'intervalle $[\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)]$, on a $]y_1, y_2[\subset f(I)$. Ceci étant vrai pour $y_1, y_2 \in f(I)$ quelconques, on déduit que $f(I)$ est un intervalle.

b) *VRAI.*
Cf. Théorème 3 du paragraphe 5.7 du cours.

c) *FAUX.*
Prendre par exemple la fonction $f\colon]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors I est borné mais $f(I) =]1, \infty[$ n'est pas bornée.

d) *FAUX.*
Prendre par exemple la fonction $f\colon]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ (fonction constante). Alors I est ouvert mais $f(I) = \{1\}$ est fermé.

e) *FAUX.*
Prendre par exemple la fonction $f\colon [-1, 0[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors f n'est ni minorée ni majorée sur I car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\left(2\pi n \pm \frac{\pi}{2}\right)^{-1} \in I$ mais

$$f\left(-\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = -\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi n + \frac{\pi}{2} > n$$

et

$$f\left(-\frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}\right) = -\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi n + \frac{\pi}{2} < -n.$$

f) FAUX.
Prendre par exemple la fonction définie par $f(x) = (x-a)\sin(x-a)$. Elle n'est ni minorée ni majorée sur I car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\Big(a+\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big) = \frac{\pi}{2}+2\pi n > n$ et $f\Big(a-\frac{\pi}{2}+2\pi n\Big) = \frac{\pi}{2}-2\pi n < -n$.

g) VRAI.
Soient $y \in f(I)$ et $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Comme I est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $]x-r, x+r[\subset I$. Puisque f est strictement croissante, on a $f\Big(x-\frac{r}{2}\Big) < y < f\Big(x+\frac{r}{2}\Big)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à l'intervalle $\Big[x-\frac{r}{2}, x+\frac{r}{2}\Big]$, on a $\Big]f\Big(x-\frac{r}{2}\Big), f\Big(x+\frac{r}{2}\Big)\Big[\subset f(I)$. Comme en plus $y \in \Big]f\Big(x-\frac{r}{2}\Big), f\Big(x+\frac{r}{2}\Big)\Big[$, il suit que $f(I)$ est ouvert en prenant $r_y = \min\Big(f\Big(x+\frac{r}{2}\Big)-y, y-f\Big(x-\frac{r}{2}\Big)\Big) > 0$ dans la définition d'ouvert.

Exercice 1. (Continuité à gauche et à droite)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}\,, & x > 3 \\ \alpha\,, & x = 3 \\ \beta x - 4\,, & x < 3 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$ pour les paires de paramètres (α, β) données ci-dessous.

a) $\Big(1, \frac{1}{2}\Big)$ b) $\Big(1, \frac{5}{3}\Big)$ c) $\Big(2, \frac{5}{3}\Big)$ d) $(1, 2)$ e) $(2, 2)$

Sol.:

Les limites à gauche et à droite de f en $x_0 = 3$ sont respectivement

$$\ell_- := \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (\beta x - 4) = 3\beta - 4$$
$$\ell_+ := \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(3x-1)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x-1}{x+1} = \frac{8}{4} = 2$$

Comme $f(x_0) = \alpha$, la fonction f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \ell_- = \alpha$, et continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \ell_+ = \alpha$. Si, en plus, $\ell_- = \ell_+ = \alpha$, alors f est continue en x_0.

a) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = -\frac{5}{2}$ et $\ell_+ = 2$, f n'est ni continue à gauche ni continue à droite.
b) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f est continue à gauche mais pas continue à droite.
c) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 1$ et $\ell_+ = 2$, f n'est pas continue à gauche mais continue à droite.
d) Avec $\alpha = 1$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, on a bien $\ell_- = \ell_+$, mais f n'est quand-même ni continue à gauche ni continue à droite parce que les limites ne sont pas égales à $f(x_0)$.
e) Avec $\alpha = 2$, $\ell_- = 2$ et $\ell_+ = 2$, f est continue.

Comme illustration, les graphes sont tracés à la Fig. 1.

Exercice 2. (Théorème des valeurs intermédaires)

Montrer que les équations suivantes admettent des solutions dans leurs domaines de définition :

a) $e^{x-1} = x + 1$ b) $x^2 - \dfrac{1}{x} = 1$

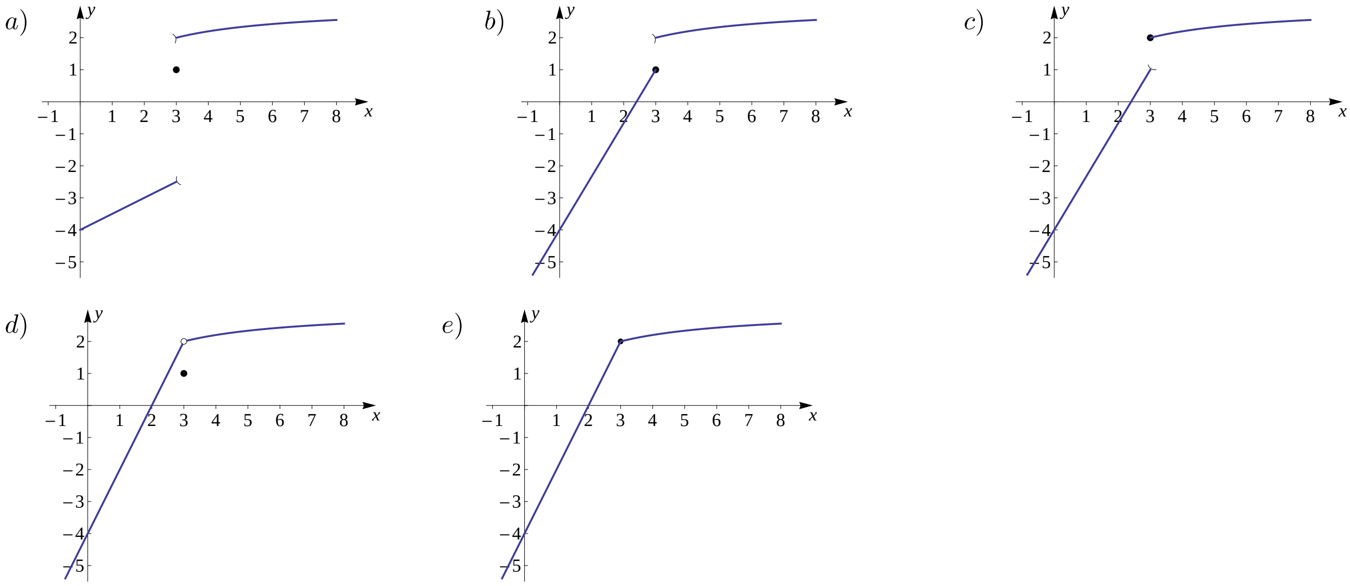

FIGURE 1 – : Graphes des fonctions $f(x)$

Sol.:

a) Posons

$$f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x-1} - x - 1 \end{array}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f(0) = \frac{1}{e} - 1 < 0 \;\textit{ et }\; f(3) = e^2 - 4 > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [0,\, 3] \;\textit{ tel que }\; f(\alpha) = 0$$

f a donc bien au moins 1 racine.

b) Posons

$$f \;:\; \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - \dfrac{1}{x} - 1 \end{array}$$

Par opérations usuelles, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$f(1) = -1 < 0 \;\textit{ et }\; f(2) = \frac{5}{2} > 0$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists \alpha \in [1,\, 2] \;\textit{ tel que }\; f(\alpha) = 0$$

f a donc bien au moins 1 racine.

Exercice 3. (Algorithme de bissection)

En appliquant l'algorithme de bissection, localiser une solution de l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0$$

dans un intervalle de longueur $L \leq \frac{1}{8}$.

Sol.: *On cherche une racine x_0 de la fonction $f(x) = x^3 + x - 1$, c'est-à-dire un x_0 qui satisfait $f(x_0) = 0$. L'algorithme de bissection permet en augmentant le nombre d'itérations de restreindre la taille de l'intervalle dans lequel se trouve x_0.*

Les étapes de l'algorithme sont données ci-dessous, où L est la longueur de l'intervalle dans lequel se trouve la solution x_0.

$$f(0) = -1 < 0 \quad \textit{et} \quad f(1) = 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \in \,]0, 1[\,, \quad L = 1$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{3}{8} < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \in \left]\tfrac{1}{2}, 1\right[, \quad L = \tfrac{1}{2}$$

$$f\left(\tfrac{3}{4}\right) = 0.172 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \in \left]\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right[, \quad L = \tfrac{1}{4}$$

$$f\left(\tfrac{5}{8}\right) = -0.130 < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \in \left]\tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{4}\right[, \quad L = \tfrac{1}{8}$$

Ainsi $x_0 \in \left]\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right[=]0.625, 0.75[$. La valeur exacte est d'ailleurs $x_0 = 0.6823\ldots$ (il est déconseillé de chercher à la trouver à la main...).

Exercice 4. (Dérivabilité)

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit dérivable partout, où :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta\,, & x > 1 \end{cases}$$

Sol.: *En tant que fonction polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il reste donc à étudier la dérivabilité de f en $x = 1$.*

Une condition nécessaire pour la dérivabilité en $x = 1$ est la continuité en ce point, c'est-à-dire,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = 3. \tag{1}$$

La fonction f est dérivable en $x = 1$ si les dérivées à gauche et à droite en ce point sont égales.

$$f'_{\text{gauche}}(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x + 3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

$$f'_{\text{droite}}(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\alpha x + \beta - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\alpha x - \alpha + \overbrace{\alpha + \beta}^{=3 \textit{ par } (1)} - 3}{x - 1} = \alpha,$$

Donc $f'_{\text{gauche}}(1) = f'_{\text{droite}}(1) \;\Leftrightarrow\; \alpha = 1$. Il suit alors de (1) que $\beta = 2$.

Ainsi la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3\,, & x \leq 1 \\ x + 2\,, & x > 1 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. (Dérivabilité)

Déterminer toutes les valeurs de l'entier $m \in \mathbb{Z}$ pour lesquelles la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une dérivée au point $x = 0$. Pour lesquelles de ces valeurs m la dérivée f' est-elle continue au point $x = 0$?

a) $f(x)=\begin{cases}\sin(x^m)\,, & x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,, & x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$

Sol.:

a) Pour $m\leq 0$, f n'est pas continue en $x=0$ et donc pas dérivable non plus. En effet, on a

$$\begin{aligned} &\textit{pour } m=0: && \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\sin(1)\neq 0=f(0),\\ &\textit{pour } m\leq -1: && \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x^{|m|}}\right) \textit{ n'existe pas.}\end{aligned}$$

Pour $m\geq 1$, f est continue en $x=0$ (car $\sin(0)=0$) et sa dérivée en ce point est

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^m)}{x}=\left(\lim_{x\to 0}x^{m-1}\right)\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^m)}{x^m}\right)}_{=1}=\begin{cases}1\,, & m=1\\ 0\,, & m\geq 2\end{cases}$$

Ainsi f est dérivable en $x=0$ pour tout $m\geq 1$.
La dérivée de f pour $x\neq 0$ est $f'(x)=mx^{m-1}\cos(x^m)$ et donc pour $m\geq 1$,

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\left\{\begin{array}{ll}1\,, & m=1\\ 0\,, & m\geq 2\end{array}\right\}=f'(0).$$

Ainsi f' est continue en $x=0$ pour tout $m\geq 1$.

b) On a

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{m-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}0, & \textit{si } m\geq 2\\ \textit{n'existe pas}, & \textit{si } m\leq 1\end{cases}$$

Donc f admet une dérivée au point $x=0$ si et seulement si $m\geq 2$ et on va seulement considérer ce cas ci-après.
La dérivée pour $x\neq 0$ est donnée par

$$f'(x)=mx^{m-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x^{m-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour $m=2$, la limite $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ n'existe pas car $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas (comme vu en cours pour $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$). Ainsi f' existe partout mais n'est pas continue en $x=0$ dans ce cas.
Pour $m\geq 3$, la limite existe et on a $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$. Donc f' est continue en $x=0$.

Exercice 6. (Propriétés de la dérivée)

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

a) f paire $\Rightarrow$ f' impaire,
b) f impaire $\Rightarrow$ f' paire,
c) f périodique $\Rightarrow$ f' périodique.

Sol.:

a) On a $f(-x) = f(x)$. En dérivant les deux membres de cette égalité, on obtient $-f'(-x) = f'(x)$, c'est-à-dire f' est impaire.

b) On dérive $f(-x) = -f(x)$ pour obtenir $-f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$. Ainsi f' est paire.

c) Pour f périodique, il existe $T > 0$ tel que $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant, on a $f'(x+T) = f'(x)$ et donc f' est aussi périodique.

Exercice 7. (Dérivées d'ordre supérieur)

Dans les trois cas suivants, calculer $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de la fonction f, pour $n \in \mathbb{N}$:

a) $f(x) = x^m \quad (m \in \mathbb{Z})$ b) $f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$ c) $f(x) = \mathrm{Log}(x)$

Sol.:

a) On distingue trois cas selon la valeur de m :

- $m = 0$: $f^{(n)}(x) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.
- $m \geq 1$: $f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases}$
- $m \leq -1$: $f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

b) On commence par calculer les quatre premières dérivées de f :

$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin(x) \qquad f''(x) = -4\sin(2x) - 2\cos(x)$$
$$f'''(x) = -8\cos(2x) + 2\sin(x) \qquad f^{(4)}(x) = 16\sin(2x) + 2\cos(x)$$

Il faut donc distinguer deux cas selon la parité de $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\Big(2^n \sin(2x) + 2\cos(x)\Big), & n \textit{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\Big(2^n \cos(2x) - 2\sin(x)\Big), & n \textit{ impair} \end{cases}$$

c) Comme $f'(x) = x^{-1}$, on peut utiliser le résultat de i) avec $m = -1$ pour obtenir $f^{(n)}$. En effet,

$$f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-(n-1))x^{-1-(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Exercice 8. (Dérivée d'une composée de fonctions)

Calculer $(g \circ f)'(0)$ pour les fonctions $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

a) $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\sin(x)^7\cos(x)^4$ et $g(x) = \mathrm{Log}(x)^3$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ et $g(x) = (x-1)^4$.

Sol.: *Comme on a $(g \circ f)'(0) = g'(f(0)) \cdot f'(0)$, il faut calculer les dérivées de f et g dans les points concernés.*

a Pour calculer $f'(x)$, écrivons $f(x) = 2x + 3 + (e^x - 1)\,u(x)$ *où* $u(x) = \sin(x)^7\cos(x)^4$. *Alors*

$$f'(x) = 2 + e^x\,u(x) + (e^x - 1)\,u'(x) \qquad \text{et} \qquad u'(x) = 7\sin(x)^6\cos(x)^5 - 4\sin(x)^8\cos(x)^3.$$

Ainsi $u(0) = u'(0) = 0$ *et donc* $f'(0) = 2$.

Ensuite on a $g'(x) = \dfrac{3\,\mathrm{Log}(x)^2}{x}$. *Puisque* $f(0) = 3$ *on trouve finalement*

$$(g \circ f)'(0) = g'(3) \cdot f'(0) = \frac{3\,\mathrm{Log}(3)^2}{3} \cdot 2 = 2\,\mathrm{Log}(3)^2.$$

b Pour calculer $f'(0)$, il faut utiliser la définition de la dérivée :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) + 2\right) = 2$$

car $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$ *comme on a montré à l'Ex. 3 iv) de la Série 8.*
Comme $g'(x) = 4(x-1)^3$ *et* $f(0) = 0$, *on obtient*

$$(g \circ f)'(0) = g'(0) \cdot f'(0) = (-4) \cdot 2 = -8.$$

Exercice 9. (Calcul de dérivées)

Calculer la dérivée f' de la fonction f et donner les domaines de f et f'.

a) $f(x) = \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $f(x) = \sin(x)^2 \cdot \cos(x^2)$

d) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ (sans formulaire !)

e) $f(x) = \sqrt{\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}$

f) $f(x) = \sqrt[5]{\left(2x^4 + e^{-(4x+3)}\right)^3}$

g) $f(x) = \mathrm{Log}_3\left(\mathrm{ch}(x)\right)$

h) $f(x) = \mathrm{Log}\left(4^{\sin(x)}\right)e^{\cos(4x)}$

Sol.:

a) $f'(x) = \dfrac{5(3x^2-1) - 6x(5x+2)}{(3x^2-1)^2} = -\dfrac{15x^2 + 12x + 5}{(3x^2-1)^2}$; $\quad D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2} - x^2\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \dfrac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$; $\quad D(f) = D(f') =]-1,1[$

c) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x^2) + \sin(x)^2 \cdot \left(-\sin(x^2)\right) \cdot 2x$

$= 2\sin(x)\left(\cos(x)\cos(x^2) - x\sin(x)\sin(x^2)\right)$; $\qquad D(f) = D(f') = \mathbb{R}$.

d) En appliquant la règle de dérivation d'un quotient à $f(x) = \mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, *on obtient*

$$f'(x) = \frac{\cos(x)^2 - \sin(x) \cdot \left(-\sin(x)\right)}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

et donc $D(f) = D(f') = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

e) Il s'agit de plusieurs composées de fonctions. Donc

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)}} \cos\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big) \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin(x)}} \cos(x) \\ =& \frac{\cos\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)\cos(x)}{4\cdot\sqrt{\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)}\cdot\sqrt{\sin(x)}} \ . \end{aligned}$$

Le domaine de f est

$$D(f) = \Big\{ x\in\mathbb{R} : \sin(x)\geq 0 \ \textit{et} \ \sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)\geq 0 \Big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[2k\pi, (2k+1)\pi\Big] \, .$$

En effet, $\sin(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\Big[2k\pi,(2k+1)\pi\Big]$ *et pour ces valeurs, on a* $\sqrt{\sin(x)}\in[0,1]$ *si bien que* $\sin\Big(\sqrt{\sin(x)}\Big)\geq 0$*, c'est-à-dire f est bien définie.*
Pour le domaine de f', il faut encore exclure les points où $\sin(x)=0$*, c'est-à-dire*

$$D(f') = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big]2k\pi, (2k+1)\pi\Big[\, .$$

f) $f'(x) = \frac{3}{5}\Big(2x^4+e^{-(4x+3)}\Big)^{-2/5}\Big(8x^3-4e^{-(4x+3)}\Big) = \dfrac{12\Big(2x^3-e^{-(4x+3)}\Big)}{5\sqrt[5]{\big(2x^4+e^{-(4x+3)}\big)^2}}$;

$D(f)=D(f')=\mathbb{R}$ *(Le dénominateur de f' ne s'annule jamais parce que* $e^{-(4x+3)}>0$ *et* $x^4\geq 0$ *pour tout $x\in\mathbb{R}$.)*

g) On transforme d'abord le logarithme de base 3 en base e :

$$f(x) = \mathrm{Log}_3\Big(\mathrm{ch}(x)\Big) = \frac{\mathrm{Log}\Big(\mathrm{ch}(x)\Big)}{\mathrm{Log}(3)} \ .$$

Ainsi $\quad f'(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{Log}(3)\,\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{\mathrm{th}(x)}{\mathrm{Log}(3)} \quad$ *et* $\quad D(f)=D(f')=\mathbb{R}$.

h) En observant que $f(x)=\sin(x)\,\mathrm{Log}(4)\,e^{\cos(4x)}$*, on obtient*

$$\begin{aligned} f'(x) =& \mathrm{Log}(4)\cos(x)\,e^{\cos(4x)} + \mathrm{Log}(4)\sin(x)\cdot\Big(-4\sin(4x)\Big)\cdot e^{\cos(4x)} \\ =& \mathrm{Log}(4)\,e^{\cos(4x)}\Big(\cos(x)-4\sin(x)\sin(4x)\Big). \end{aligned}$$

$D(f)=D(f')=\mathbb{R}$

Exercice 10. (V/F : Dérivation)

Soient $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ des fonctions.

	V	F
a) (*) Si f est dérivable en $a\in\mathbb{R}$, alors il existe $\delta>0$ tel que f est continue sur $]a-\delta,a+\delta[$.	☐	☐
b) Si f est dérivable à gauche et à droite en $a\in\mathbb{R}$, alors f est dérivable en a.	☐	☐
c) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g(x)=\sqrt{f^2(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.	☐	☐

d) Si $f(x) = x^2 - 2x$, alors $(f \circ f)'(1) = 0$. $\square$ $\square$

Sol.:

a) FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. *Cette fonction est continue en* $x = 0$ *parce qu'on a*

$$0 \leq f(x) \leq x^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. *Il suit par le théorème des deux gendarmes que* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. *Par contre* f *n'est pas continue ailleurs qu'en* 0. *En effet, soit* $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *l'intervalle ouvert* $\left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[$ *contient des nombres rationnels et irrationnels. En prenant* $a_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\cap \mathbb{Q}$ *et* $b_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ *pour chaque* $n \in \mathbb{N}^*$, *on obtient deux suites* $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ *et* $(b_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *qui convergent les deux vers* x_0 *quand* $n \to \infty$. *Mais*

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} a_n^2 = x_0^2 > 0 = \lim_{n \to \infty} f(b_n),$$

et donc f *n'est pas continue en* x_0.
Pour voir que f *est dérivable en* $x = 0$, *observer que*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

et ainsi $-|x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |x|$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *De nouveau par le théorème des deux gendarmes on conclut que*

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

b) FAUX.
Prendre par exemple $f(x) = |x|$ *qui n'est pas dérivable en* 0. *Les dérivées unilatérales en* 0 *existent mais elles ne sont pas égales.*

c) FAUX.
En prenant $f(x) = x$, *on a* $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ *qui n'est pas dérivable en* 0 *(cf. cours).*

d) VRAI.
On a $f'(1) = 2 - 2 = 0$ *et donc* $(f \circ f)'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1) = 0$.