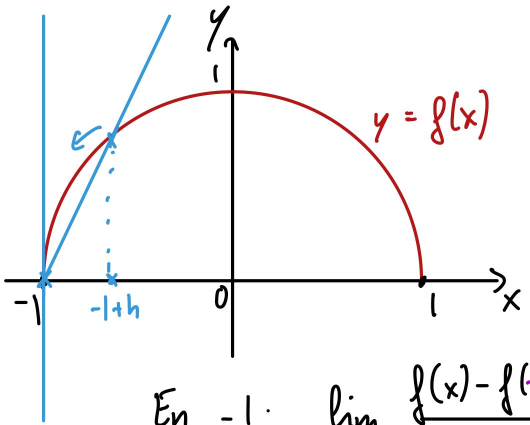
Contre-exemple : $f : \left| \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$ Rmq : $f(x)^2 + x^2 = 1, \forall x \in [-1,1]$



f est continue sur $[-1,1]$

f est dérivable sur $]-1,1[$

mais pas sur $[-1,1]$

fin cours 16/11

En -1 : $\displaystyle\lim_{x\to -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1}$

$\displaystyle = \lim_{x\to -1+} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = +\infty$

En $+1$: $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$

Def (Fonctions de classe C^k). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide.

On définit :

- $C^0(I) := \{ f : I \to \mathbb{R}$ telles que f est continue sur $I \}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$C^k(I) := \left\{ f : I \to \mathbb{R} \text{ tq. } f \text{ est } k \text{ fois dérivable sur } I \text{ et } f^{(k)} \text{ est continue sur } I \right\}$$

- $C^\infty(I) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I)$ c'est-à-dire

$$f \in C^\infty(I) \text{ ssi } f \in C^k(I), \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Notation : $\displaystyle\bigcap_{k=p}^{m} A_k = A_p \cap A_{p+1} \cap \dots \cap A_m$ (et $\displaystyle\bigcup_{k=p}^{m} A_k$ de façon analogue)

6.8 Applications du calcul différentiel

6.8.1 Théorème de Rolle

Thm: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Si

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$,
- $f(a) = f(b) = 0$

Alors $\exists u \in]a,b[$ t.q $f'(u) = 0$

Exemple : $f : \begin{vmatrix} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2} \end{vmatrix}$ (cf. ci-dessus)

$\rightsquigarrow$ satisfait les hypothèses et $\exists u \in]-1,1[$ t.q $f'(u)=0$ (ici $u=0$).

Preuve : f est continue sur $[a,b]$ donc elle atteint un maximum M et un minimum m.

- Si $M = m = 0$ alors $f(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$, donc $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a,b[$
- Supposons que $M \neq 0$.

$\exists c \in]a,b[$ t.q. $f(c) = M$ et donc $f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.
Comme f est dérivable en c (par hypothèse) :

- $f'(c) = \lim\limits_{x \to c-} \dfrac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{\leq 0}} \geq 0$

- $f'(c) = \lim\limits_{x \to c+} \dfrac{\overbrace{f(x)-f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-c}_{\geq 0}} \leq 0$

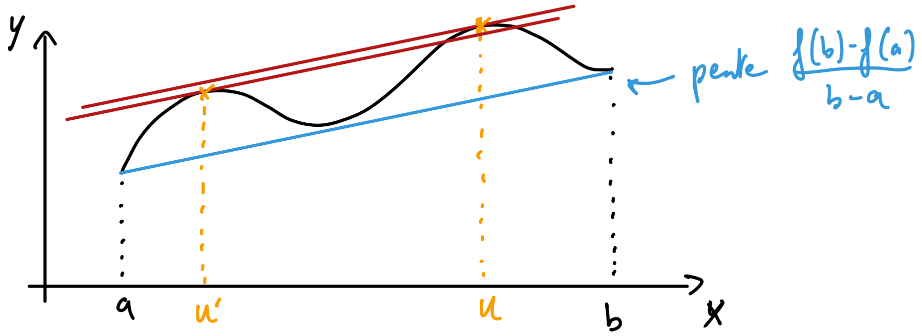
Donc $f'(c) = 0$

- Si seul $m \neq 0$ (et $M=0$) : on fait un raisonnement analogue pour montrer $f'(m) = 0$. ∎

6.8.2 Théorème des accroissements finis

Thm: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Alors $\exists\, u \in]a,b[$ t.q $f'(u) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $(*)$

Illustration:



Preuve: Soit $g(x) = f(x) - \Big(\underbrace{f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)}_{\text{équation de la droite bleue}}\Big)$

On a
- $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$
- g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

Donc par le Thm. de Rolle, $\exists\, u \in]a,b[$ t.q $g'(u) = 0 = f'(u) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Donc $f'(u) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ∎

Remarque: $(*)$ peut être ré-écrite $f(b) = f(a) + f'(u)\cdot(b-a)$

Reformulation du Thm: Soit $h > 0$ et f continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$. Alors $\exists\, \theta \in]0,1[$ t.q.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)\cdot h$$

(Se déduit de la remarque avec $a = x$, $b = x+h$ et $u = x + \theta h$
et $u \in]x, x+h[\Leftrightarrow \theta \in]0,1[$)

Corollaire: Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors:

(i) $f' = 0$ sur $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f est constante sur $[a,b]$

(ii) $f' \geq 0$ sur $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f est croissante sur $[a,b]$

(iii) $f' \leq 0$ sur $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f est décroissante sur $[a,b]$

(iv) $f' > 0$ sur $]a,b[$ $\Rightarrow$ f est strictement croissante sur $[a,b]$

(v) $f' < 0$ sur $]a,b[$ $\Rightarrow$ f est strictement décroissante sur $[a,b]$

(vi) $f(a) \geqslant 0$ et $f' \geqslant 0$ sur $]a,b[$ $\Rightarrow$ $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$.

Contre-exemple à $\Leftarrow$ pour (iv) : $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array} \right.$ est strictement croissante et $f'(0) = 0$

Thm (Accroissements finis généralisés). Soient f et g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ et $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Alors : il existe $u \in]a,b[$ tel que :
$$\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} .$$

Rmq : Pour $g(x) = x$, on retrouve le Thm. des accroissements finis. L'hypothèse $g'(x) \neq 0$ implique, par le Thm. Accroissem^t finis que $g(b)-g(a) \neq 0$

Preuve : On pose $h(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(x) - g(a)) \right]$

On a . $h(a) = 0$ et $h(b) = 0$

. h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

On conclut avec le Thm de Rolle que $\exists u \in]a,b[$ t.q $h'(u) = 0$ ■

6.8.3 Règle de Bernoulli - L'Hospital.

Thm : Soient f, g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ avec $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Si :

- $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0$
- $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{=}{\text{existe}} \ell \in \mathbb{R}$

Alors $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Rmq (généralisation de B.-H.) : on a un Thm. analogue pour $\lim_{x \to b-}$, $\lim_{x \to +\infty}$, $\lim_{x \to -\infty}$ et pour les formes indéterminées $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (au lieu de $\frac{0}{0}$).

Exemples :

la fct° est paire $\left(\frac{0}{0}\right)$

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

paire $\left(\frac{0}{0}\right)$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2}$.

$\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$

(iii) $\lim_{x \to 0+} x \cdot \log(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\log(x)}{1/x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$.

(iv) $\lim_{x \to 0+} x^x \overset{= \exp(\log(x))^x}{=} \lim_{x \to 0+} \exp(x \cdot \log(x))$

continuité de exp $\quad = \exp\left(\lim_{x \to 0+} x \log x\right) = \exp(0) = 1$.

(v) Soit $c \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \overbrace{\log\left(1+\frac{c}{x}\right)}^{\text{bien défini si } x \text{ assez grand}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+c/x)}{1/x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{B.H.}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{(1+c/x)} \cdot \left(\frac{-c}{x^2}\right)}{-1/x^2} \quad \text{dérivée d'une composit° de fct°}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{c}{1+c/x} = c$$

(vi) Soit $c \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{c}{n}\right)^n}_{\text{limite d'une suite}} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{c}{x}\right)^x}_{\text{limite d'une fonction}} = \lim_{x \to +\infty} \exp\Big(\overbrace{x \log\left(1+\frac{c}{x}\right)}^{\to c}\Big) = \exp(c)$$

car exp est continue

fin cours 20/11